

DER ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN
UNTER DEM GESICHTSPUNKT
MINIMALER REGLEREMPFFINDLICHKEIT

von

Peter Hippe

—
Erlangen 1976

1976 № 330

DER ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN UNTER DEM GESICHTSPUNKT MINIMALER REGLEREMPFFINDLICHKEIT



Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor - Ingenieur

vorgelegt von
Peter Hippe

Erlangen 1976



Als Dissertation genehmigt vom

Fachbereich Ingenieurwissenschaften

der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 14. Mai 1976

Tag der Promotion: 31. Juli 1976

Dekan: Prof. Dr. H.J. Schneider

Berichterstatter: Prof. Dr. H. Schlitt

Prof. Dr. R. Unbehauen

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
Zusammenfassung	1
1 Einleitung	3
2 Der Entwurf von Zustandsreglern im Zeitbereich	8
2.1 Allgemeiner Teil	8
2.2 Beispiel	16
3 Der Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich	24
3.1 Das Entwurfsverfahren	24
3.2 Beispiel	32
4 Der im Frequenzbereich entworfene Zustandsregler als Beobachter	36
5 Der Entwurf von Zustandsreglern mit I-Anteil im Zeitbereich	40
6 Der Entwurf von Zustandsreglern mit I-Anteil im Frequenzbereich	44
6.1 Das Entwurfsverfahren	44
6.2 Beispiel	49
7 Einfluß der Regler-Realisierung auf das Verhalten des Zustandsregelkreises	52
8 Einleitende Bemerkungen zu den Empfindlichkeitsuntersuchungen	62
9 Die statische Summenempfindlichkeit verschiedener Regler-Normalformen	68
9.1 Die Beobachternormalform	70
9.2 Die Regelungsnormalform	73
9.3 Die Steuerbarkeitsnormalform	75

	Seite
9.4 Die Beobachtbarkeitsnormalform	78
9.5 Die Diagonalform	82
9.5.1 Diagonalform für Regler zweiter Ordnung	82
9.5.2 Diagonalform für Regler dritter Ordnung	85
9.6 Diskussion der Ergebnisse	91
10 Numerische Untersuchungen der Empfindlichkeit von Zustandsreglern	92
10.1 Einleitende Bemerkungen	92
10.2 Zur Definition der kritischen Fehlerschranke	93
10.3 Digitalprogramm HIPWOC zur Bestimmung der kritischen Fehlerschranke κ^*	102
10.4 Vergleich von statischer Summenempfindlichkeit und kritischer Fehlerschranke der Normalformen verschiedener Zustandsregler	108
10.4.1 Der Regelkreis ROI 1	108
10.4.2 Der Regelkreis ROI 2	111
10.4.3 Der Regelkreis ROI 3	112
10.4.4 Der Regelkreis ROI 4	114
10.4.5 Der Regelkreis ROI 5	115
10.5 Zusammenfassung der Ergebnisse	117
11 Erweiterung der Empfindlichkeitsbetrachtungen auf Zustandsregler mit I-Anteil	119
11.1 Normalformen für Zustandsregler mit I-Anteil	119
11.2 Bestimmung der kritischen Fehlerschranke für Zustandsregler mit I-Anteil	124
11.3 Beispiele für Zustandsregler mit I-Anteil	126
11.3.1 Der Regelkreis RMI 1	126
11.3.2 Der Regelkreis RMI 2	128
11.4 Diskussion der Ergebnisse	129
12 Empfindlichkeitsbetrachtungen für Zustandsregler mit mehreren Eingängen	131

	Seite
13 Bestimmung allgemeiner Reglerstrukturen mit geringer Empfindlichkeit	133
13.1 Einleitende Bemerkungen	133
13.2 Definition der quadratischen Summenempfindlichkeit	135
13.3 Minimierung der Reglerempfindlichkeit	138
 Anhang A Zustandsregelkreise mit Strecken dritter Ordnung	141
A1 Der Regelkreis ROI 1	141
A2 Der Regelkreis ROI 2	144
A3 Der Regelkreis ROI 3	146
A4 Der Regelkreis ROI 4	148
A5 Der Regelkreis ROI 5	150
 Anhang B Zustandsregelkreise mit I-Anteil	152
B1 Der Regelkreis RMI 1	152
B2 Der Regelkreis RMI 2	155
 Anhang C Optimierte Zustandsregler	157
 Literaturverzeichnis	159



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ZUSAMMENFASSUNG

Der erste Teil der Arbeit enthält Entwurfsverfahren für Zustandsregler bei Strecken mit einem Eingang und einem oder mehreren Ausgängen. Behandelt werden im einzelnen der Zeit- und der Frequenzbereichsentwurf von Zustandsreglern mit und ohne I-Anteil für die genannten Strecken.

Dabei zeigt sich, daß der getrennte Entwurf von Beobachter und linearer Zustandsrückführung im Zeitbereich mit wesentlich größerem Rechenaufwand verbunden ist als der geschlossene Entwurf des Zustandsreglers im Frequenzbereich. Der zusätzliche Rechenaufwand beim Zeitbereichsentwurf ist durch die explizite Berechnung des Zusammenhangs zwischen Strecken- und Beobachterzustand bedingt, die beim Frequenzbereichsentwurf unterbleibt.

In einem gesonderten Kapitel wird jedoch angegeben, wie auch der im Frequenzbereich entworfene Zustandsregler als Beobachter eingesetzt werden kann.

Ein weiterer Nachteil des Zeitbereichsentwurfs von Zustandsreglern zeigt sich bei einer Untersuchung des Einflusses von Fehlern in den Reglerparametern auf das Verhalten des Regelkreises. Weder bei analogen noch bei digitalen Zustandsreglern kann davon ausgegangen werden, daß die berechneten Reglerkoeffizienten mit unendlicher Genauigkeit realisiert sind. Im Hinblick auf eine preisgünstige Realisierung sollten die Anforderungen an die Genauigkeit der analogen oder an die Wortlänge der digitalen Reglerkomponenten möglichst gering sein.

An einem Beispiel wird gezeigt, daß bei Anwendung eines gängigen Entwurfsverfahrens im Zeitbereich eine Reglerstruktur entsteht, bei der schon Ungenauigkeiten von wenigen Promille zu einer Instabilität des Regelkreises führen können, während dies bei günstig gewählter Reglerstruktur über den Frequenzbereichsentwurf erst bei 50%igen Fehlern in allen Parametern auftritt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird deshalb der Reglerentwurf (zunächst für Strecken mit einem Eingang und einem Ausgang) unter dem Gesichtspunkt geringer Auswirkungen von Fehlern im Regler auf das Verhalten

des Regelkreises betrachtet. Dazu wird eine Klassifikation bekannter Normalformen für die Realisierung von Reglerübertragungsfunktionen durchgeführt. Diese Klassifikation erlaubt es, aufgrund einfachster Berechnungen (Quotientenbildung von Parametern der Reglerübertragungsfunktion) eine Aussage darüber zu treffen, bei welcher Normalform der Einfluß von Fehlern in den Zweigverstärkungen am geringsten ist.

Eine Erweiterung der Ergebnisse auf Zustandsregler mit I-Anteil sowie auf Zustandsregler für Strecken mit mehreren Ausgängen ist angefügt.

Schließlich wird eine Methode angegeben, mit der allgemeine Reglerstrukturen bestimmt werden können, die sich durch geringe Empfindlichkeit gegenüber Fehlern in ihren Parametern auszeichnen.

1 EINLEITUNG

Die in den sechziger Jahren entwickelte moderne Regelungstheorie im Zustandsraum erbrachte als wesentliches Erkenntnis, daß zu einer optimalen Regelung alle Zustandsgrößen der Strecke bekannt sein müssen. Bei Vorgabe eines quadratischen Optimierungskriteriums ist der optimale Regler ein reiner P-Regler im Bezug auf die Zustandsgrößen. Andererseits kann mit Hilfe einer proportionalen Rückführung aller Zustandsgrößen jede gewünschte Polkonfiguration im geschlossenen Regelkreis erzeugt werden. Die Vorgabe einer bestimmten Polkonfiguration für die geregelte Strecke beinhaltet ein gewisses Maß an Willkür, das jedoch auch beim optimalen Regler existiert, und zwar bei der Vorgabe des Kostenfunktional. Da jedes lineare Regelgesetz bezüglich irgendeines Kostenfunktional optimal ist [12], bedeutet die im folgenden durchgeführte Betrachtung von Zustandsreglern für beliebige Polvorgaben keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Da Strecken n -ter Ordnung mit n linear unabhängigen Ausgängen die Ausnahme darstellen, benötigt man zur Konstruktion von Zustandsreglern ein Zusatzsystem, welches die Information über den nicht direkt meßbaren Teil des Streckenzustands liefert. Dieses Zusatzsystem ist der "Beobachter", für den es verschiedene Ansätze von KALMAN, LUENBERGER und GILCHRIST [22] gibt. Der im folgenden verwendete LUENBERGER-Beobachter [17] ist ein dynamisches System bestimmter Ordnung, das als Eingangsgrößen den Streckenein- und Ausgang erhält und einen Schätzwert für den wahren Streckenzustand liefert. Dieser Schätzwert ermöglicht die Realisierung des Regelgesetzes für beliebige Polvorgaben, wobei die Pole des Beobachters ebenfalls frei vorgebar sind. Der Festlegung der Eigenwerte des Regelkreises sind theoretisch keine Grenzen gesetzt. In der Praxis existieren dagegen eine Reihe von Beschränkungen für die erzielbare Regelgüte, welche sich in drei Hauptgruppen einteilen lassen, und zwar

- 1.) ungenügende Kenntnis der Streckengleichungen
- 2.) begrenzte Stellenergie
- 3.) begrenzte Genauigkeit im Zustandsregler selbst.

Der erste Punkt bezeichnet eine der Hauptschwierigkeiten, mit denen der Regelungstechniker konfrontiert ist. Die angesetzten linearen Bewegungsgleichungen eines technischen Systems erfüllen nie die für eine beliebige Polvorgabe notwendigen Voraussetzungen bezüglich einer exakten Übereinstimmung zwischen theoretischem und praktischem Streckenverhalten, vor allem im Hinblick auf beliebige Amplituden und Frequenzen. Die Streckengleichungen gelten praktisch immer nur in einem begrenzten Amplituden- und Frequenzbereich. Stellt man zu hohe Anforderungen an den Zustandsregler, so verläßt man den Geltungsbereich der Streckenbeschreibung, wodurch die praktischen und theoretischen Werte immer stärker divergieren. Fehler in der Streckenbeschreibung, die entweder aufgrund ungenauer Identifikation oder zeitlich langsam veränderlicher Streckenparameter auftreten, versucht man durch Empfindlichkeitsuntersuchungen zu erkennen und in ihrer Auswirkung zu vermindern. Über dieses Gebiet existiert eine Fülle von Veröffentlichungen (siehe z.B. das Literaturverzeichnis in [13]), die ständig anwächst.

Der nächste Punkt, die endliche Stellenergie, stellt die stärkste Einschränkung für die erzielbare Regelgeschwindigkeit dar. Während sich die durch Punkt 1 bedingten Grenzen durch entsprechenden Aufwand (z.B. bessere Identifikation) etwas hinausschieben lassen, ist die Begrenzung durch die Stellenergie nicht überspielbar. Dies ist einer der Gründe, weshalb der Zustandsregler in wenigen Fällen eine echte Konkurrenz für den klassischen PID-Regler darstellt.

Zwar erlaubt der PID-Regler - selbst unter der Annahme exakter Streckenkenntnis und unbegrenzter Stellenergie - nur eine begrenzte Verbesserung der Regelkreisdynamik. Bedingt durch langsame Strecken und begrenzte Stellenergie ist dies jedoch in vielen Fällen gerade das "Machbare", das durch einen idealen Zustandsregler nur unwesentlich (und mit viel größerem Aufwand) verbessert werden könnte. Darüber hinaus ermöglicht der PID-Regler aufgrund seiner geringen Anzahl von Einstellmöglichkeiten eine leichte Anpassung im on-line-Betrieb, was bei Zustandsreglern aufgrund der großen Anzahl von Einstellmöglichkeiten nicht praktikabel ist.

Andererseits existieren Regelprobleme, bei denen die Streckenkenntnis und die Stellenergie hinreichen, um bessere Regelergebnisse zu erzielen, als dies mit einem PID-Regler möglich ist. Hier gelingt mit Zustandsreglern eine optimale Ausnutzung der physikalischen Gegebenheiten.

Dem dritten Punkt, der Genauigkeit bei der Reglersynthese, ist bisher wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. In [23] sind Ansätze dafür vorhanden, jedoch schränken die getroffenen Annahmen (nur Fehler in der Systemmatrix des Reglers) die Gültigkeit der Ergebnisse ein.

Daß dem Einfluß der Genauigkeit der Reglerkoeffizienten bisher relativ wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde, dürfte vor allem daran liegen, daß die praktisch ausgeführten Zustandsregler in der Luft- und Raumfahrt (neuerdings auch in Schienenfahrzeugen) ausschließlich digital realisiert wurden. Da die Wortlänge handelsüblicher Digitalrechner mindestens 16 bit beträgt, liegen die relativen Fehler der digitalen Reglerkoeffizienten unterhalb von 10^{-4} .

Bei einer analogen Realisierung von Zustandsreglern ist eine relative Genauigkeit von 10^{-4} jedoch nur unter sehr großem gerätetechnischen und finanziellen Aufwand zu erzielen. Die industriell üblichen Fertigungstoleranzen liegen weitaus höher. Da Fehler im Promille-Bereich aber in bestimmten Fällen (siehe Kap.7) schon zur Instabilität des Regelkreises führen können, ist bei einer analogen Realisierung die Frage nach einer Regler-Realisierung mit günstigen Empfindlichkeitseigenschaften durchaus von Interesse.

Bei einer digitalen Realisierung der Zustandsregler läßt sich der Aufwand durch eine Verringerung der Wortlänge ebenfalls stark reduzieren. Je unempfindlicher der Regler auf Fehler in seinen Koeffizienten reagiert, desto kleiner kann die Wortlänge bei Vorgabe einer bestimmten Toleranzgrenze für das Regelverhalten gewählt werden.

Es existieren also zwei grundsätzlich verschiedene Empfindlichkeitsprobleme im Regelkreis, und zwar

- 1.) die Empfindlichkeit des Regelkreises gegenüber Parameterschwankungen in der Strecke und
- 2.) die Empfindlichkeit des Regelkreises gegenüber Parameterschwankungen im Regler.

Das erste Problem führt auf die Fragestellung, wie die Übertragungseigenschaften des Reglers gewählt werden müssen, damit die auftretenden Parameterschwankungen in der Strecke möglichst geringen Einfluß auf das Verhalten des Regelkreises haben. Unter der Annahme beliebig genau eingestellter Reglerkoeffizienten hat die Struktur der Reglerrealisierung keinen Einfluß auf die Dynamik des Regelkreises, da dann das Eingangs - Ausgangsverhalten des Reglers unabhängig von der gewählten Struktur ist.

Das zweite Problem führt dagegen auf die Frage nach derjenigen Realisierung für die gegebene Übertragungsfunktion des Reglers, für welche Ungenauigkeiten in den Reglerkoeffizienten einen möglichst geringen Einfluß auf das Regelergebnis besitzen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den mit kleinstem Aufwand verbundenen Entwurf von Zustandsreglern für Strecken mit einem Eingang zu untersuchen. Dabei wird ein geringer Aufwand in zweifacher Hinsicht angestrebt, nämlich einmal im Hinblick auf den Rechenaufwand zur Bestimmung der Reglergleichungen und zum anderen im Hinblick auf die erforderliche Genauigkeit für die Realisierung des Reglers.

Zunächst wird der Entwurf von Zustandsreglern für lineare, zeitinvariante Strecken mit einem Eingang und m Ausgängen im Zeitbereich und im Frequenzbereich behandelt. Dabei wird gezeigt, wie der im Frequenzbereich entworfene Zustandsregler als Beobachter verwendet werden kann. Daraufhin wird der Entwurf von Zustandsreglern mit I-Anteil im Zeitbereich und im Frequenzbereich durchgeführt.

Schließlich folgt ein Vergleich des Reglerentwurfs im Zeit- und im Frequenzbereich unter dem Gesichtspunkt der Auswirkung von Fehlern in den Reglerparametern auf den geschlossenen Regelkreis.

Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Auswahl von Reglerrealisierungen, die eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Fehlern im Regler selbst besitzen. Die bisher bekannten Untersuchungen des Einflusses von fehlerhaften Reglerkoeffizienten wurden für den isolierten Regler im Hinblick auf seine Eigendynamik durchgeführt [23], [14], [18]. Bei einem Regler interessiert jedoch nicht in erster

Linie seine Eigendynamik sondern sein Einfluß auf das Verhalten des Regelkreises. Während das Stabilitätsverhalten des isolierten Reglers allein von seiner Systemmatrix bestimmt wird, gehen in das Stabilitätsverhalten des Regelkreises auch die Ein- und Ausgangsvektoren des Reglers ein, deren Variation folglich berücksichtigt werden muß.

Durch die Definition der "statischen Summenempfindlichkeit" eines Zustandsreglers gelingt es, einfache Kriterien dafür herzuleiten, welche Normalform (kanonische Realisierung) eines Reglers bei vorgegebener Reglerübertragungsfunktion das günstigste Empfindlichkeitsverhalten im Regelkreis besitzt. Anhand von Stabilitätsuntersuchungen an konkreten Regelkreisen wird die Aussagekraft der statischen Summenempfindlichkeit überprüft.

Schließlich wird die Möglichkeit einer weiteren Verbesserung der Reglerempfindlichkeit durch Minimierung eines quadratischen Empfindlichkeitsmaßes untersucht.

2 DER ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN IM ZEITBEREICH

2.1 Allgemeiner Teil

Betrachtet werden lineare, zeitinvariante Strecken n-ter Ordnung mit einem Eingang und m linear unabhängigen Ausgängen. Weiterhin ist vorausgesetzt, daß diese Strecken vollständig steuerbar und beobachtbar sind und keinen direkten Durchgriff vom Eingang auf den Ausgang besitzen.

Die Zustandsgleichungen dieser Strecken können ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x}\end{aligned}\tag{2.1}$$

angegeben werden. Dabei ist

$$\underline{x}^T = (x_1 \ x_2 \ . \ . \ . \ x_n) \quad *)$$

der n-dimensionale Zustandsvektor,

$$\underline{y}^T = (y_1 \ y_2 \ . \ . \ . \ y_m)$$

der m-dimensionale Ausgangsvektor,

u die Steuergröße,

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die (n x n) Systemmatrix,

$$\underline{b}^T = (0 \ 0 \ . \ . \ . \ 0 \ 1),$$

der n-dimensionale Eingangsvektor und

*) *Unterstrichene Kleinbuchstaben bezeichnen Spaltenvektoren, unterstrichene Großbuchstaben Matrizen. Das hochgestellte T bedeutet transponiert.*

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{n-2}^1 & c_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_0^m & c_1^m & \dots & c_{n-2}^m & c_{n-1}^m \end{pmatrix}$$

die (m x n) Ausgangsmatrix.

Durch eine Proportionalrückführung aller Zustandsgrößen x_i der Strecke in der Form

$$u = \underline{k}^T \underline{x} \quad (2.2)$$

gelingt es, die Pole des geschlossenen Regelkreises, und damit auch sein charakteristisches Polynom

$$\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b}\underline{k}^T) = s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0, \quad (2.3)$$

beliebig festzulegen. Die Berechnung von $\underline{k}^T$ kann z.B. durch Auswertung der Determinante $\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b}\underline{k}^T)$ und anschließendem Koeffizientenvergleich geschehen. Besitzen die Zustandsgleichungen die normierte Gestalt (2.1), so läßt sich dieser Koeffizientenvergleich sehr einfach durchführen. Für allgemeine Systemmatrizen $\underline{A}$ ist dagegen ein lineares Gleichungssystem n-ter Ordnung zu lösen.

In [1] ist eine Formel zur Berechnung von $\underline{k}^T$ angegeben. Zu ihrer Auswertung muß jedoch die Inverse der Steuerbarkeitsmatrix der Strecke und ein Matrizenpolynom n-ter Ordnung in $\underline{A}$ gebildet werden, was ebenfalls mit großem Rechenaufwand verbunden ist.

Wenn alle Zustandsgrößen der Strecke direkt meßbar sind, ist mit der Bestimmung von $\underline{k}^T$ der Entwurf des Zustandsreglers abgeschlossen.

Wenn der Rang $\underline{C}$ kleiner als die Streckenordnung n ist, benötigt man zur Nachbildung der nicht meßbaren Zustandsgrößen einen Beobachter [17]. Der Beobachter ist ein dynamisches System mit freivorgebbaren Eigenwerten, dessen Zustandsgleichungen die Form

$$\dot{\underline{z}} = \underline{F}\underline{z} + \underline{D}\underline{y} + \underline{T}\underline{b}u \quad (2.4)$$

besitzen. Wenn die Eigenwerte der Beobachtermatrix $\underline{F}$ einen negativen Realteil besitzen und zwischen den Matrizen $\underline{F}$, $\underline{D}$, $\underline{I}$, $\underline{A}$ und $\underline{C}$ die Beziehung

$$\underline{I}\underline{A} - \underline{F}\underline{I} = \underline{D}\underline{C} \quad (2.5)$$

besteht, dann gilt zwischen Streckenzustand $\underline{x}$ und Beobachterzustand $\underline{z}$ im eingeschwungenen Zustand

$$\underline{z} = \underline{I}\underline{x}. \quad (2.6)$$

Besitzt der Beobachter die Ordnung n der Strecke, so läßt sich $\underline{I} = \underline{I}$ (Einheitsmatrix) erzielen. Man spricht dann vom sogenannten "Einheitsbeobachter"; der Schätzwert $\hat{\underline{x}}$ für den wahren Streckenzustand $\underline{x}$ ergibt sich damit einfach zu $\hat{\underline{x}} = \underline{z}$. Diesen Schätzwert $\hat{\underline{x}}$ kann man nun statt des nicht vollständig meßbaren Zustandes der Strecke in das Regelgesetz (2.2) einsetzen und erhält

$$\underline{u} = \underline{k}^T \hat{\underline{x}}. \quad (2.7)$$

Der Entwurf des Zustandsreglers geht für Rang $\underline{C} < n$ also in zwei Schritten vor sich, nämlich

- 1.) Berechnung des Regelgesetzes $\underline{u} = \underline{k}^T \underline{x}$ und
- 2.) Konstruktion eines Beobachters zur Erzeugung eines Schätzwertes für den nicht vollständig meßbaren Streckenzustand.

Der Zustandsregler besteht somit aus dem Beobachter und einem Proportionalregler, welcher die beobachteten Zustandsgrößen in der Form (2.7) zurückführt.

Benutzt man die vorhandenen Ausgangsgrößen der Strecke mit zur Bildung von $\hat{\underline{x}}$, so genügt der "reduzierte Beobachter" $(n-m)$ -ter Ordnung. Aus dem Zustand $\underline{z}$ dieses reduzierten Beobachters und dem Streckenausgang $\underline{y}$ läßt sich der Schätzwert für den Streckenzustand in der Form

$$\hat{\underline{x}} = \left(\begin{array}{c} \underline{C} \\ \underline{I} \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \underline{y} \\ \underline{z} \end{array} \right) \quad (2.8)$$

bilden, wenn die Zeilen von $\underline{C}$ und $\underline{I}$ linear unabhängig sind. Dies

läßt sich jedoch immer erreichen [17]. Setzt man $\underline{x}$ nach Gleichung (2.8) in das Regelgesetz (2.7) ein, so folgt

$$\underline{u} = \underline{k}^T \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{T} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \underline{g}^T \underline{y} + \underline{e}^T \underline{z} \quad , \quad (2.9)$$

wobei die Vektoren $\underline{e}$ und $\underline{g}$ die Beziehung

$$\underline{g}^T \underline{C} + \underline{e}^T \underline{T} = \underline{k}^T \quad (2.10)$$

erfüllen.

Die Stellgröße u wird also bei Verwendung eines reduzierten Beobachters aus dem Streckenausgang und dem Beobachterzustand gebildet. Der reduzierte Beobachter ($n-m$)-ter Ordnung ermöglicht die Rekonstruktion des gesamten Streckenzustandes über die Beziehung (2.8). Zur Bildung von u benötigt man aber nicht den Verlauf jeder einzelnen Zustandsgröße x_i , sondern nur den Verlauf des linearen Funktionals $u = \underline{k}^T \underline{x}$.

In [16] hat LUENBERGER gezeigt, daß zur Beobachtung eines linearen Funktionals von Zustandsgrößen ein Beobachter ($v-1$)-ter Ordnung ausreicht, wobei v der Beobachtbarkeitsindex der Strecke ist. Der Beobachtbarkeitsindex einer Strecke nach Gleichung (2.1) ist definiert als die kleinste ganze Zahl v , für welche die Matrix

$$\bar{Q} = (\underline{C}^T, \underline{A}^T \underline{C}^T, \dots, (\underline{A}^T)^{v-1} \underline{C}^T) \quad (2.11)$$

den Rang n besitzt. Da die Beziehung

$$v-1 \leq n-m$$

gilt, kann die Beobachterordnung durch den Verzicht auf die Rekonstruktion der einzelnen Zustandsgrößen häufig wesentlich verringert werden. Bei Strecken mit einem Ausgang ist dies nicht möglich, weil für $m = 1$ die Beziehung $v = n$ gilt.

Die Möglichkeit einer weiteren Reduzierung der Beobachterordnung [7] gegenüber ($v-1$) soll hier und im folgenden nicht berücksichtigt werden, da dies nur für spezielle lineare Funktionale bei einer gegebenen Strecke möglich ist, was gleichbedeutend mit einer Beschränkung der

freien Polwahl im geschlossenen Regelkreis ist.

Das charakteristische Polynom des Beobachters für ein lineares Funktional

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}) = s^{v-1} + \varphi_{v-2} s^{v-2} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0 \quad (2.12)$$

ist frei vorgebar. Diese freie Vorgabe erlaubt die Konstruktion eines stabilen Beobachters mit günstiger Dynamik. Als Faustformel für die Festlegung der Beobachterdynamik kann die Forderung verwendet werden, daß der Beobachter schneller einschwingt als die geregelte Strecke.

Die Stellgröße u kann aus dem Streckenausgang $\underline{y}$ und dem Beobachterzustand $\underline{z}$ gemäß

$$u = \underline{g}^T \underline{y} + \underline{e}^T \underline{z} \quad (2.13)$$

gebildet werden, wobei die Vektoren $\underline{e}^T$ und $\underline{g}^T$ die Gleichung

$$\underline{g}^T \underline{C} + \underline{e}^T \underline{T} = \underline{k}^T \quad (2.14)$$

erfüllen müssen. Die unbekannten Parameter des Beobachters und der Proportionalrückführung des geschätzten Funktional der Zustandsgrößen ergeben sich als Lösung der Gleichungen (2.5), (2.12) und (2.14). Diese drei Beziehungen stellen $[n \ v + (v-1)]$ Bedingungsgleichungen für die $[v(n+m+v-1)-n]$ Unbekannten in $\underline{T}$, $\underline{D}$, $\underline{F}$, $\underline{g}^T$ und $\underline{e}^T$ dar. Benutzt man Gleichung (2.12) und die $[v(m+v-2)-(n-1)]$ Freiheitsgrade zur vollständigen Vorgabe von $\underline{F}$ und $\underline{e}^T$, so ist das resultierende Gleichungssystem $(n \ v)$ -ter Ordnung linear.

Der bisher betrachtete Regelkreis aus Strecke, Beobachter und Proportionalregler ist in der Lage, vorübergehende Störungen, die sich in einer Auslenkung der Strecke aus dem Nullzustand auswirken, gemäß seiner vorgegebenen Dynamik auszuregeln. Zur Beurteilung des üblicherweise untersuchten Stör- und Führungsverhaltens müssen zunächst entsprechende Eingriffe definiert werden.

Der Einfachheit halber sei angenommen, daß die Hauptstörgröße $r(t)$ auf den Eingang der Regelstrecke wirkt. Ein anderer Angriffspunkt für die Störung bedeutet zwar eine Veränderung der Nullstellen in

der Störübertragungsfunktion des Regelkreises. Dies hat jedoch keinen Einfluß auf den prinzipiellen Gang des Entwurfsverfahrens für den Zustandsregler.

Da die Strecke nach Voraussetzung nur einen Eingang besitzt, kann lediglich für eine Ausgangsgröße y_1 ein unabhängiger Sollwert w vorgegeben werden. Diese Ausgangsgröße sei y_1 , was sich gegebenenfalls durch einfaches umstellen in Gleichung (2.1) erzielen läßt. Der entsprechende Zustandsregelkreis ist in Bild 2.1 dargestellt.

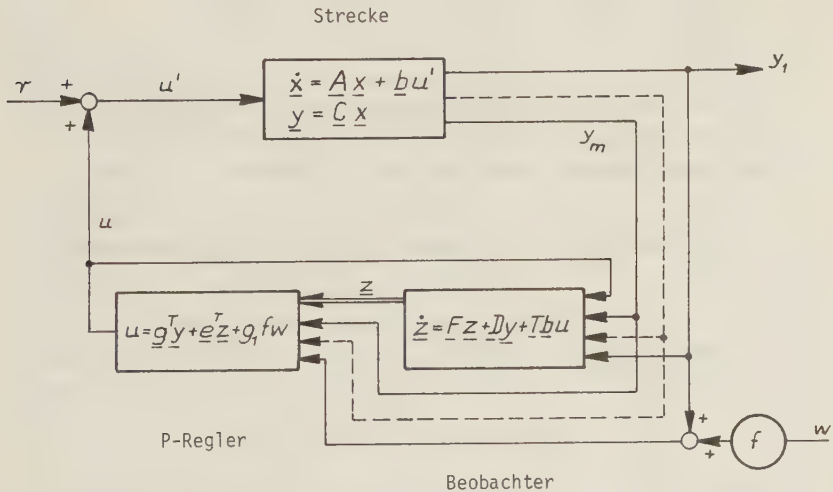


Bild 2.1

Durch die Hinzufügung einer Führungsgröße $w(t)$ nach Bild 2.1 ergibt sich die Stellgröße

$$u = \underline{g}^T \underline{y} + \underline{e}^T \underline{z} + g_1 f w. \quad (2.15)$$

Berücksichtigt man darüber hinaus die Störgröße $r(t)$ nach Bild 2.1, so ergeben sich die Gleichungen des betrachteten Zustandsregelkreises

zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} + \underline{b} \underline{g}^T \underline{C} & \underline{b} \underline{e}^T \\ \underline{D} \underline{C} + \underline{T} \underline{b} \underline{g}^T \underline{C} & \underline{F} + \underline{T} \underline{b} \underline{e}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b} \underline{g}_1^T \underline{f} \\ \underline{T} \underline{b} \underline{g}_1^T \underline{f} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} \underline{b} \\ 0 \end{pmatrix} r \quad (2.16)$$

Durch die Einführung einer neuen Zustandsgröße

$$\underline{\xi} = \underline{z} - \underline{T} \underline{x} \quad (2.17)$$

vereinfachen sich die Zustandsgleichungen (2.16)

und man erhält

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} + \underline{b} \underline{k}^T & \underline{b} \underline{e}^T \\ 0 & \underline{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b} \underline{g}_1^T \underline{f} \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} \underline{b} \\ -\underline{T} \underline{b} \end{pmatrix} r \quad (2.18)$$

An dieser Form der Gleichungen für den geschlossenen Regelkreis erkennt man, daß sich die Pole des Kreises zusammensetzen aus den gewünschten Polen der Strecke, die sich als Lösung der Gleichung

det $(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = 0$ ergeben und den Polen des Beobachters, die sich als Lösung von det $(s\underline{I} - \underline{F}) = 0$ ergeben. Es gilt nämlich

$$\det \left\{ s\underline{I}_{n+v-1} - \begin{bmatrix} \underline{A} + \underline{b} \underline{k}^T & \underline{b} \underline{e}^T \\ 0 & \underline{F} \end{bmatrix} \right\} = \\ = \det (s\underline{I}_n - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) \cdot \det (s\underline{I}_{v-1} - \underline{F}).$$

Aus der Form der Gleichung (2.18) erkennt man weiterhin, daß die Beobachterpole von w aus nicht steuerbar sind. Der Führungsübergang des Zustandsregelkreises verläuft also so, als ob kein Beobachter im Kreis vorhanden wäre, sondern alle Zustandsgrößen der Strecke direkt gemessen werden könnten.

Die Systemmatrix des Regelkreises nach Bild 2.1 hat dieselbe Gestalt wie im Falle einer Ausgangsgröße y , der in [8] behandelt wurde. Für die Aufstellung der Führungs- und Störübertragungsfunktionen des Regelkreises kann man deshalb die dortigen Ergebnisse sinngemäß übernehmen.

Die Führungsübertragungsfunktionen des Regelkreises nach Bild 2.1 ergeben sich damit zu

$$F_{wi}(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{(c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T)} g_1 f, \quad (2.19)$$

$i=1,2,\dots,m.$

Für die Störübertragungsfunktionen ergibt sich

$$F_{ri}(s) = \frac{Y_i(s)}{R(s)} = \frac{(c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{T} \mathbf{b} \mathbf{e}^T)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})}, \quad (2.20)$$

$i=1,2,\dots,m.$

Damit die Regelgröße y_1 einem Führungssprung ohne bleibende Abweichung folgt, muß der Faktor f die Größe

$$f = \frac{\beta_0}{g_1 c_0} \quad (2.21)$$

erhalten. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß die Strecke keine Nullstelle bei $s=0$ besitzt, daß also $c_0 \neq 0$ ist.

In den Führungsübertragungsfunktionen des Zustandsregelkreises kürzen sich also die Beobachterpole, während sie in das Störverhalten eingehen.

2.2 BEISPIEL

Für eine Regelstrecke sechster Ordnung mit zwei Ausgängen, deren Signalflußgraph in Bild 2.2 dargestellt ist, wird ein Zustandsregler gesucht, der die Streckenpole von

$$s_{1/2}^o = -1, \quad s_{3/4}^o = -2, \quad s_{5/6}^o = -1 \pm 3i$$

nach

$$s_{1/2}^g = -2 \pm 2i, \quad s_{3/4}^g = 2 \pm 2i \text{ und } s_{5/6}^g = -3$$

verschiebt. Die Beobachterpole mögen bei $s = -4$ liegen.

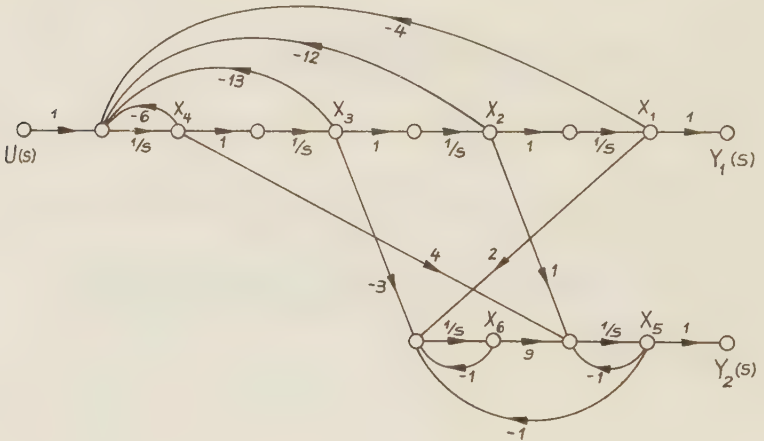


Bild 2.2

Die Zustandsgleichungen der Strecke lauten

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$$

(2.22)

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -12 & -13 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der geregelten Strecke ergibt sich mit den vorgegebenen Polen s_i^g zu

$$\det (s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b}\underline{k}^T) = (s+2+2i)^2 (s+3)^2 (s+2-2i)^2 \quad (2.23)$$

$$= s^6 + 14s^5 + 89s^4 + 328s^3 + 736s^2 + 960s + 576.$$

Setzt man $u = \underline{k}^T \underline{x}$ in die Streckengleichungen ein, so ergibt sich $\det (s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b}\underline{k}^T)$ zu

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 \\ 4-k_1 & 12-k_2 & 13-k_3 & 6-k_4+s & -k_5 & -k_6 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & s+1 & -9 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1+s \end{vmatrix} =$$

$$= s^6 + (8-k_4) s^5 + (35-k_3 - 2k_4 - 4k_5) s^4 +$$

$$(98 - k_2 - 2k_3 - 10k_4 - 4k_5 + 7k_6) s^3 + \quad (2.24)$$

$$(158 - k_1 - 2k_2 - 10k_3 + 26k_5 + 3k_6) s^2 +$$

$$(128 - 2k_1 - 10k_2 - k_5 - k_6) s +$$

$$(40 - 10k_1 - 18k_5 - 2k_6) .$$

Die Rückföhrkoeffizienten k_i für die Zustandsgrößen der Strecke ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich der beiden Polynome (2.23) und (2.24). Dieser Koeffizientenvergleich föhrt auf das Gleichungssystem

$$\underline{A}_k \cdot \underline{k} = \underline{b}_k \quad (2.25)$$

mit $\underline{k}^T = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6)$,

$$\underline{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -10 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -10 & 0 & 26 & 3 \\ -2 & -10 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -18 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\underline{b}_k^T = (6 \quad 54 \quad 230 \quad 578 \quad 832 \quad 536) .$$

Als Lösung ergibt sich

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} -52.7700 \\ -72.8038 \\ -39.1357 \\ -6. \\ -0.716071 \\ 2.29435 \end{pmatrix} .$$

Da nur zwei Ausgangsgrößen der Strecke meßbar sind, muß das lineare Funktional $u = \underline{k}^T \underline{x}$ beobachtet werden. Die Ordnung des notwendigen Beobachters ergibt sich aus dem Beobachtbarkeitsindex ν der Strecke. Die Matrix

$$\underline{\bar{Q}} = \left[\underline{C}^T, \underline{A}^T \underline{C}^T, (\underline{A}^T)^2 \underline{C}^T \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

besitzt den Rang $n=6$, und damit ist der Beobachtbarkeitsindex der betrachteten Regelstrecke $\nu=3$. Zur Beobachtung von $u=\underline{k}^T \underline{x}$ genügt also ein Beobachter zweiter Ordnung.

Die Anzahl der vorgebbaren Parameter beträgt $[\nu(m+\nu-2) - (n-1)] = 4$. Zwei Parameter in $\underline{F}$ sind durch die Gleichung $\det(s\underline{I}-\underline{F}) = s^2+8s+16$ festgelegt. Man kann deshalb die 4 frei vorgebbaren Parameter zur vollständigen Vorgabe von $\underline{F}$ und $\underline{e}^T$ in der Form

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{e}^T = (10 \quad 10)$$

verwenden.

Damit ergeben sich die $n\nu = 18$ Bedingungsgleichungen für den Beobachter des linearen Funktionalis $u=\underline{k}^T \underline{x}$ zu

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -12 & -13 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(g_1 \quad g_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (10 \quad 10) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \end{pmatrix} =$$

$$= (-52.770 \quad -72.8038 \quad -39.1357 \quad -6. \quad -716071 \quad 2.29435),$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{aligned} -4t_{14} + 2t_{16} + 4t_{11} + t_{21} &= d_{11} \\ t_{11} - 12t_{14} + t_{15} + 4t_{12} + t_{22} &= 0 \\ t_{12} - 13t_{14} - 3t_{16} + 4t_{13} + t_{23} &= 0 \\ t_{13} - 6t_{14} + 4t_{15} + 4t_{14} + t_{24} &= 0 \\ -t_{15} - t_{16} + 4t_{15} + t_{25} &= d_{12} \\ 9t_{15} - t_{16} + 4t_{16} + t_{26} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -4t_{24} + 2t_{26} + 4t_{21} &= d_{21} \\
 t_{21} - 12t_{24} + t_{25} + 4t_{22} &= 0 \\
 t_{22} - 13t_{24} - 3t_{26} + 4t_{23} &= 0 \\
 t_{23} - 6t_{24} + 4t_{25} + 4t_{24} &= 0 \\
 -t_{25} - t_{26} + 4t_{25} &= d_{22} \\
 9t_{25} - t_{26} + 4t_{26} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 + 10t_{11} + 10t_{21} &= -52.770 \\
 10t_{12} + 10t_{22} &= -72.8038 \\
 10t_{13} + 10t_{23} &= -39.1357 \\
 10t_{14} + 10t_{24} &= -6. \\
 g_2 + 10t_{15} + 10t_{25} &= -7.16071 \\
 10t_{16} + 10t_{26} &= 2.29435
 \end{aligned}$$

Faßt man die 18 Gleichungen zu einem System zusammen, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem (2.26).

Es lautet

$$\underline{A}_B \underline{s}_B = \underline{b}_B \quad (2.26)$$

mit $\underline{s}_B^T =$

$$= (t_{11} \ t_{12} \ t_{13} \ t_{14} \ t_{15} \ t_{16} \ t_{21} \ t_{22} \ t_{23} \ t_{24} \ t_{25} \ t_{26} \ d_{11} \ d_{12} \ d_{21} \ d_{22} \ g_1 \ g_2),$$

$$\underline{A}_B = \begin{pmatrix}
 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 4 & 0 & -12 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & -13 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -13 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

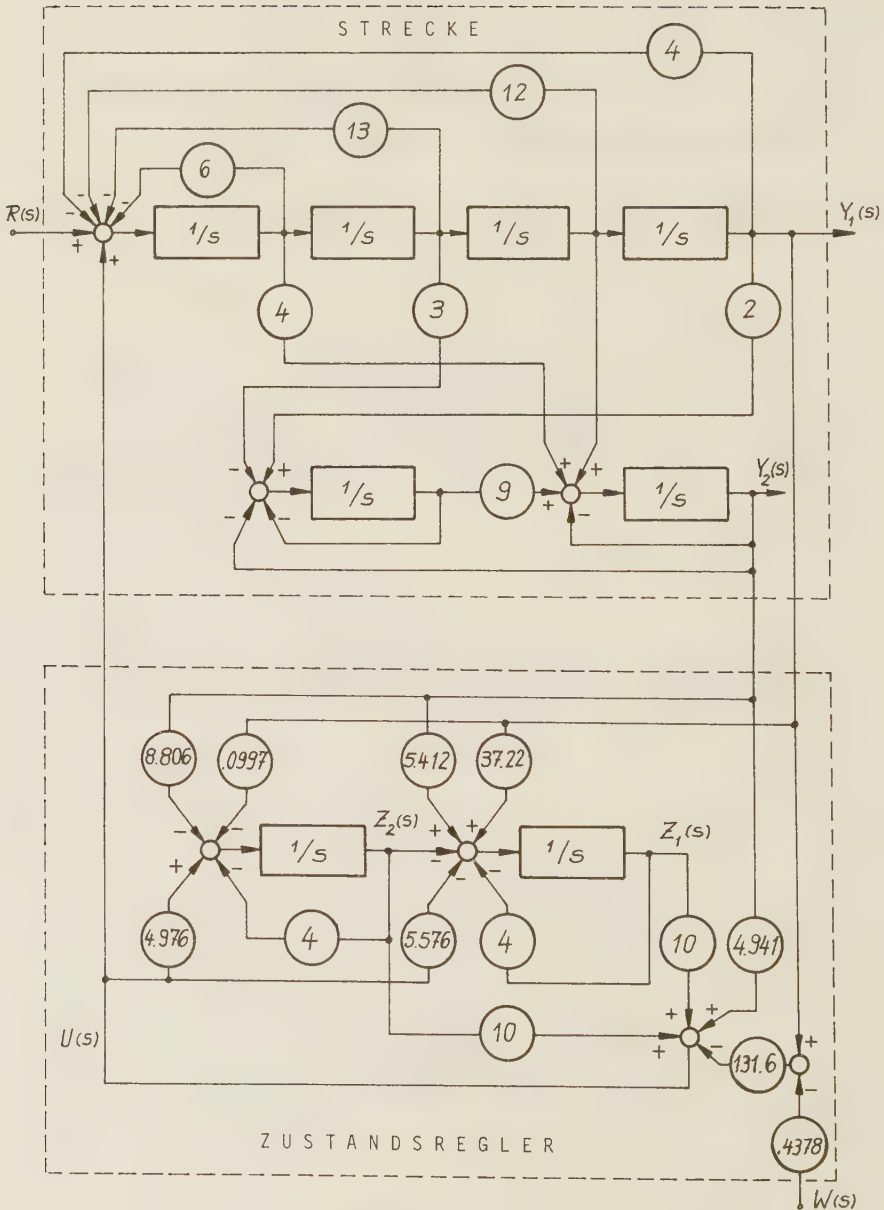


Bild 2.3

Mit der Streckenübertragungsfunktion $Y_1(s)/U(s)$ ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises nach Gleichung (2.19) zu

$$F_{w1}(s) = \frac{Y_1(s)}{W(s)} = \frac{57.6 (s^2 + 2s + 10)}{s^6 + 14s^5 + 89s^4 + 328s^3 + 736s^2 + 960s + 576} \quad (2.31)$$

Mit der Determinante

$$\det(\underline{sI} - \underline{F} - \underline{Tbe}^T) = \begin{vmatrix} s+4+55.763 & 55.763+1 \\ -49.763 & s+4-49.763 \end{vmatrix} = s^2 + 14s + 89.763, \quad (2.32)$$

lautet die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises nach Gleichung (2.20)

$$F_{r1}(s) = \frac{Y_1(s)}{R(s)} = \quad (2.33)$$

$$= \frac{s^4 + 16s^3 + 127.763s^2 + 319.526s + 897.63}{s^8 + 22s^7 + 217s^6 + 1264s^5 + 4784s^4 + 12096s^3 + 20032s^2 + 19968s + 9216}.$$

Nach einem Störsprung $r(t) = 1(t)$ wird sich also eine bleibende Regelabweichung

$$y_{1bl} = \frac{897.63}{9216} = 0.0974 \quad (2.34)$$

ergeben, während die Regelgröße y_1 einem Führungssprung $w(t) = 1(t)$ ohne bleibende Regelabweichung folgt.

3 DER ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN IM FREQUENZBEREICH

3.1 Das Entwurfsverfahren

Der Entwurf von Zustandsreglern verläuft im Zeitbereich in mehreren Etappen. Zunächst wird die lineare Rückführung der Zustandsgrößen so berechnet, daß sich die gewünschten Pole im Regelkreis ergeben. Danach wird ein Beobachter für das lineare Funktional $u = \underline{k}^T \underline{x}$ entworfen und aus dem Strecken- und dem Beobachteraussgang schließlich die Stellgröße gebildet. Der entstehende Zustandsregler ist ein System mit mehreren Eingängen und einem Ausgang. Diesen Regler kann man im Frequenzbereich nach der Polvorgabe für den geschlossenen Regelkreis ohne den Umweg über das lineare Funktional und den Beobachter hierfür direkt entwerfen.

Eine Strecke n-ter Ordnung mit einem Eingang und m Ausgängen nach Gleichung (2.1) kann im Frequenzbereich durch m Übertragungsfunktionen der Form

$$F_{Si}(s) = \frac{Z_{Si}(s)}{N_S(s)} = \frac{c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.1)$$

beschrieben werden. Der im Kapitel 2 betrachtete Zustandsregler für diese Strecken besitzt (m+1) Eingänge $y_1, y_2, \dots, y_m$ und w und einen Ausgang u . Folglich kann für ihn im Frequenzbereich der Ansatz

$$U(s) = F_{Rw}(s) W(s) + \sum_{i=1}^m F_{Ri}(s) Y_i(s) \quad (3.2)$$

gemacht werden, mit

$$F_{Ri}(s) = \frac{Z_{Ri}(s)}{N_R(s)} \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \quad (3.3)$$

und
$$F_{Rw}(s) = \frac{Z_{Rw}(s)}{N_R(s)} \quad .$$

Bild 3.1 zeigt das Blockschaltbild des entsprechenden Regelkreises.

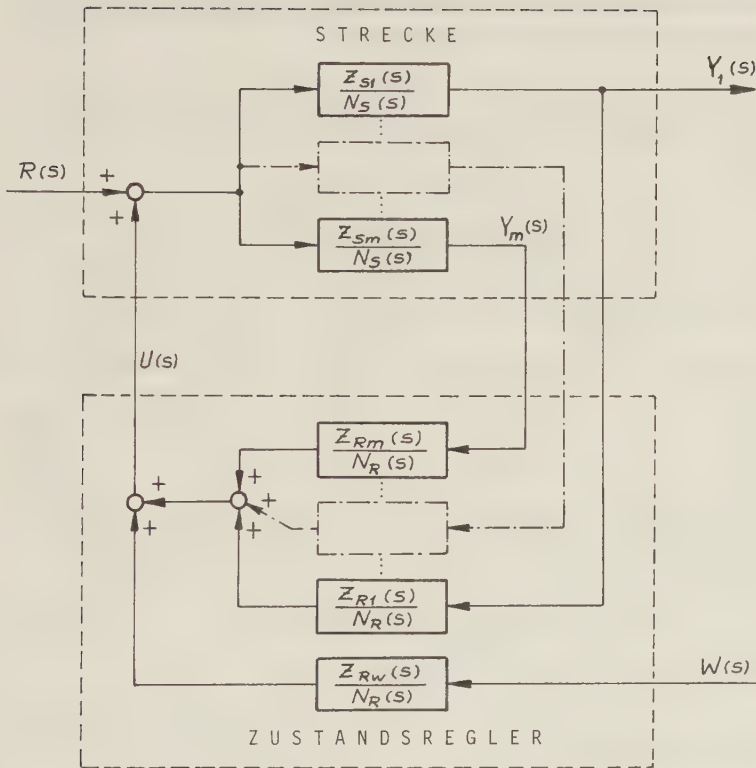


Bild 3.1

Die Übertragungsfunktionen dieses Regelkreises errechnen sich zu

$$F_{wi}(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{Z_{Si}(s) Z_{Rw}(s)}{N_S(s) N_R(s) - \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}(s)}, \quad (3.4)$$

$$i=1,2,\dots,m$$

und

$$F_{ri}(s) = \frac{Y_i(s)}{R(s)} = \frac{Z_{Si}(s) N_R(s)}{N_S(s) N_R(s) - \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}(s)}, \quad (3.5)$$

$$i=1,2,\dots,m.$$

Beim Zeitbereichsentwurf des Zustandsreglers ergaben sich die Übertragungsfunktionen des Zustandsregelkreises zu

$$F_{wi}(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{Z_{Si}(s) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) g_1^T}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.6)$$

und

$$F_{ri}(s) = \frac{Y_i(s)}{R(s)} = \frac{Z_{Si}(s) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{I} \mathbf{b} \mathbf{e}^T)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (3.7)$$

Ein Gleichsetzen der Übertragungsfunktionen (3.4) und (3.6) sowie (3.5) und (3.7) liefert die Beziehungen

$$N_S(s) N_R(s) = \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}), \quad (3.8)$$

$$N_R(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{I} \mathbf{b} \mathbf{e}^T), \quad (3.9)$$

$$Z_{Rw}(s) = \frac{\beta_0}{c_0'} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}). \quad (3.10)$$

Aus Gleichung (3.9) folgt, daß der Zustandsregler dieselbe Ordnung wie der Beobachter besitzt, nämlich $(v-1)$. Damit hat $N_R(s)$ die Gestalt

$$N_R(s) = s^{v-1} + p_{v-2}s^{v-2} + \dots + p_1s + p_0. \quad (3.11)$$

Für beliebige Polynome der geregelten Strecke

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0 \quad (3.12)$$

und des Beobachters

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = s^{v-1} + \varphi_{v-2}s^{v-2} + \dots + \varphi_1s + \varphi_0 \quad (3.13)$$

ist Gleichung (3.8) nur dann lösbar, wenn in den Reglerübertragungsfunktionen $F_{Ri}(s)$, $i=1,2,\dots,m$ mindestens $(n+v-1)$ freie Parameter vorhanden sind. Daraus folgt, daß die Zählerpolynome $Z_{Ri}(s)$ des Zustandsreglers die Form

$$Z_{Ri}(s) = l_{v-1}^i s^{v-1} + \dots + l_1^i s + l_0^i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.13a)$$

erhalten müssen.

Setzt man die Polynome aus (3.11) bis (3.13a) in Gleichung (3.8) ein, so ergibt sich links und rechts ein Polynom $(n+v-1)$ -ter Ordnung in s .

Der Koeffizientenvergleich zur Lösung von Gleichung (3.8) kann in der Form [10]

$$\underline{K}_h \underline{h} = \underline{B}_\varphi \underline{\varphi} + \underline{d} \quad (3.14)$$

angegeben werden, mit dem $[(m+1)v-1]$ -dimensionalen Parametervektor

$$\underline{h}^T = (p_{v-2} \dots p_1 p_0 | -\gamma_{v-1}^1 \dots -\gamma_1^1 | -\gamma_0^1 | \dots | -\gamma_{v-1}^m \dots -\gamma_1^m | -\gamma_0^m),$$

der $(n+v-1) \times [(m+1)v-1]$ - Koeffizientenmatrix

$$\underline{K}_h = \begin{pmatrix} 1 & & & \underline{0} & c_{n-1}^1 & & \underline{0} & c_{n-1}^m & & \underline{0} \\ a_{n-1} & 1 & & & c_{n-2}^1 & c_{n-1}^1 & & c_{n-2}^m & c_{n-1}^m & & \underline{0} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & c_{n-1}^1 & \vdots & \vdots & c_{n-1}^m & \\ & & \vdots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{v-2} & c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{v-1}^1 & c_0^m & c_1^m & \dots & c_{v-1}^m \\ & a_0 & \dots & a_{v-3} & c_0^1 & \dots & c_{v-2}^1 & c_0^m & \dots & c_{v-2}^m & & \\ & & \underline{0} & a_0 & \underline{0} & \dots & c_0^1 & \underline{0} & \dots & c_0^m & & \end{pmatrix},$$

der $(n+v-1) \times (v-1)$ -Matrix,

dem $(n+v-1)$ -dim. Vektor

$$\underline{B}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \underline{0} \\ \beta_{n-1} & 1 & & \\ \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \beta_{n-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{v-2} \\ \beta_0 & & \dots & \beta_{v-3} \\ & \underline{0} & & \beta_0 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ \beta_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 - a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dem $(v-1)$ -dimensionalen Vektor

$$\underline{\varphi}^T = (\varphi_{v-2} \dots \varphi_1 \varphi_0) .$$

Ähnliche Gleichungssysteme zum Regler-Entwurf sind auch bei WEBER [27], TAESCHNER [25] und CHEN [4] angegeben. Aus der Definition des Beobachtbarkeitsindex v über die Matrix

$$\underline{Q} = [\underline{C}^T, \underline{A}^T \underline{C}^T, \dots, (\underline{A}^T)^{v-1} \underline{C}^T] \quad (3.15)$$

folgt, daß für beobachtbare Systeme die Beziehung $n \leq mv$ gilt. Damit ist die Anzahl der unbekannten Regler-Koeffizienten in $\underline{h}$ entweder größer oder gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen in (3.14).

Für den Fall $mv > n$ müssen $(mv-n)$ Parameter bei der Lösung des Gleichungssystems (3.14) vorgegeben werden. Wenn der Rang von $\underline{K}_h$ gleich $(n+v-1)$ beträgt, ist das Gleichungssystem (3.14) immer lösbar. Für $mv=n$ erhält man dann sogar eine eindeutig bestimmte Lösung der Form

$$\underline{h} = \underline{K}_h^{-1} [\underline{B} \underline{\varphi} + \underline{d}] . \quad (3.16)$$

Bei Strecken mit einem Ausgang ist $\underline{K}_h$ immer quadratisch. Die Frage, wann $\underline{K}_h$ vollen Rang besitzt, kann mit Hilfe der Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}$ beantwortet werden.

Setzt man die spezielle Form der Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{C}$ aus Gleichung (2.1) in die Matrix $\underline{Q}$ ein, so ergibt sich die $n \times (vm)$ -Matrix

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} c_0^1 & \dots & c_0^m & | & c_{0,1}^1 & \dots & c_{0,1}^m & | & c_{0,v-1}^1 & \dots & c_{0,v-1}^m \\ c_1^1 & \dots & c_1^m & | & c_{1,1}^1 & \dots & c_{1,1}^m & | & c_{1,v-1}^1 & \dots & c_{1,v-1}^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n-2}^1 & \dots & c_{n-2}^m & | & c_{n-2,1}^1 & \dots & c_{n-2,1}^m & | & c_{n-2,v-1}^1 & \dots & c_{n-2,v-1}^m \\ c_{n-1}^1 & \dots & c_{n-1}^m & | & c_{n-1,1}^1 & \dots & c_{n-1,1}^m & | & c_{n-1,v-1}^1 & \dots & c_{n-1,v-1}^m \end{pmatrix} , \quad (3.17)$$

wobei die $c_{j,k}^i$ folgendem Bildungsgesetz genügen:

$$c_{j,k}^i = c_{j-1,k-1}^i - a_j c_{n-1,k-1}^i \quad (3.18)$$

$$\text{mit } i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$k = 1, 2, \dots, v-1$$

$$c_{j,0}^i = c_j^i$$

$$c_{j,k}^i = 0 \quad \text{für } j < 0$$

Andererseits kann die Matrix K_h durch rangneutrale elementare Umformungen auf eine Gestalt gebracht werden, bei welcher in der oberen rechten Ecke eine $(v-1) \times mv$ -Nullmatrix auftritt. Dazu subtrahiert man zunächst von der $(\alpha v-1+q)$ -ten Spalte von K_h die mit c_{n-1}^α multiplizierte q -te Spalte für $\alpha = 1, 2, \dots, m$ und $q = 1, 2, \dots, v-1$. Dadurch erhält K_h die Form

$$K_h^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & c_{n-1,1}^1 & & & c_{n-1,1}^m & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & & c_{n-2,1}^1 & c_{n-1,1}^1 & & c_{n-2,1}^m & c_{n-1,1}^m & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & a_{n-1} & & c_{n-1,1}^1 & c_{n-1}^1 & & \\ & & & & & & & c_{n-1,1}^m & c_{n-1}^m \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{v-2} & c_{0,1}^1 & c_{1,1}^1 & \dots & c_{v-2,1}^1 & c_{v-2}^1 \\ & & & & c_{0,1}^1 & c_{1,1}^1 & \dots & c_{v-3,1}^1 & c_{v-3}^1 \\ & & & a_0 & & & & c_{0,1}^m & c_{v-3}^m \\ 0 & & & & 0 & & & 0 & \\ & & & & & c_{0,1}^1 & c_0^1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & c_{0,1}^m & c_0^m \end{array} \right)$$

wobei die $c_{j,1}^i$ nach Gleichung (3.18) gebildet werden. Subtrahiert man in einem zweiten Schritt von der $(\alpha v-2+q)$ -ten Spalte von $K_h^{(1)}$ die mit $c_{n-1,1}^\alpha$ multiplizierte q -te Spalte für $\alpha=1, 2, \dots, m$ und $q=2, 3, \dots, v-1$ und wiederholt dieses Vorgehen, so erhält man nach dem $(v-1)$ -ten Schritt die Matrix

$$\underline{K}_h^{(v-1)} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} & & & & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \underline{0} & & & & \underline{0} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & a_{n-1} & c_{n-1,v-1}^1 & \dots & c_{n-1,1}^1 & c_{n-1}^1 & c_{n-1}^m & \dots & c_{n-1,1}^m & c_{n-1}^m \\ & & & c_{n-2,v-1}^1 & c_{n-2,1}^1 & \dots & c_{n-2,1}^1 & c_{n-2}^1 & c_{n-2}^m & \dots & c_{n-2,1}^m & c_{n-2}^m \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{v-2} & & & & & & & & \\ & a_0 & & a_{v-3} & & & & & & & & \\ & & & & c_{v,v-1}^1 & \dots & c_{v,1}^1 & c_v^1 & c_v^m & \dots & c_{v,1}^m & c_v^m \\ \underline{0} & & & a_0 & c_{0,v-1}^1 & \dots & c_{0,1}^1 & c_0^1 & c_0^m & \dots & c_{0,1}^m & c_0^m \end{pmatrix}$$

mit den $c_{j,k}^i$ nach Gleichung (3.18). Durch weitere elementare Umformungen gelingt es schließlich, die Matrix $\underline{K}_h^{(v-1)}$ auf die Gestalt

$$\tilde{\underline{K}}_h = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & 1 \end{pmatrix} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\bar{Q}} \end{array} \right\} \begin{matrix} v-1 \\ n \end{matrix}$$

zu bringen. Die Matrix $\tilde{\underline{K}}_h$, und damit auch die Matrix $\underline{K}_h$, hat genau dann vollen Rang, wenn $\underline{\bar{Q}}$ den Rang n hat.

Damit ist gezeigt, daß das Gleichungssystem (3.14) genau dann für $vm=n$ eine eindeutige Lösung besitzt, wenn die Regelstrecke vollständig beobachtbar ist. Im Falle $vm>n$ ist das Gleichungssystem (3.14) nach Vorgabe von $(mv-n)$ Parametern in $\underline{h}$ eindeutig lösbar, sofern durch die Vorgabe der Parameter kein Rangdefekt in $\underline{K}_h$ auftritt.

Da die Normalform (2.1) der Zustandsgleichungen nur dann aufgestellt werden kann, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar ist, bedeutet das obige Ergebnis, daß das Gleichungssystem (3.14) für vollständig steuerbare und beobachtbare Strecken immer lösbar ist.

Im Frequenzbereich bedeutet die Bedingung $\text{Rang } \underline{\bar{Q}} = n$, daß in den Streckenübertragungsfunktionen $Z_{Si}(s)/N_S(s)$, $i=1,2,\dots,m$ kein "gemeinsamer Faktor" auftritt, oder anders ausgedrückt, daß keine Pol-Nullstellenkompensation in allen $Z_{Si}(s)/N_S(s)$ zugleich auftritt.

Zum Entwurf eines Zustandsreglers im Frequenzbereich benötigt man also lediglich die Strecken-Übertragungsfunktionen (3.1), die frei vorgebbaren charakteristischen Polynome der geregelten Strecke (3.12) und des Beobachters (3.13) und erhält als Lösung der Gleichung (3.14) die Koeffizienten der Regler-Übertragungsfunktionen

$$F_{Ri}(s) = \frac{Z_{Ri}(s)}{N_R(s)} = \frac{l_{v-1}^i s^{v-1} + \dots + l_1^i s + l_0^i}{s^{v-1} + p_{v-2} s^{v-2} + \dots + p_1 s + p_0} \quad , \quad (3.19)$$

$i=1,2,\dots,m$.

Wählt man die Nullstellen der Übertragungsfunktion des Führungskanals nach Gleichung (3.10), so liegen sie auf den Polen des Beobachters und es ergibt sich

$$F_{RW}(s) = \frac{Z_{RW}(s)}{N_R(s)} = \frac{\beta_o / c_o \cdot 1 (s^{v-1} + \varphi_{v-2} s^{v-2} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0)}{s^{v-1} + p_{v-2} s^{v-2} + \dots + p_1 s + p_0} \quad . \quad (3.20)$$

Dabei muß natürlich beachtet werden, daß $c_o \neq 0$ ist, da für Strecken mit einer Nullstelle bei $s=0$ nicht erreicht werden kann, daß der Ausgang einem Führungssprung ohne bleibende Regelabweichung folgt.

Beim Regler-Entwurf im Frequenzbereich besteht die Möglichkeit, die Nullstellen des Führungskanals frei zu wählen, so daß sie nicht die Beobachterpole, sondern z.B. langsamere Streckenpole abdecken. Da alle Regler-Übertragungsfunktionen denselben Nenner besitzen, können sie gemeinsam in einem Netzwerk $(v-1)$ -ter Ordnung realisiert werden. Diese Realisierung kann nach den verschiedensten Gesichtspunkten geschehen, wobei im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit besonders der Aspekt der Reduzierung der Reglerempfindlichkeit gegenüber Parameterschwankungen im Regler selbst untersucht werden soll.

3.2 BEISPIEL

In diesem Kapitel wird der Frequenzbereichsentwurf des Zustandsreglers durchgeführt, der in Kapitel 2.2 im Zeitbereich berechnet wurde. Der Signalflußgraph der Regelstrecke ist in Bild 2.2 dargestellt. Über die MASONsche Formel [6] erhält man aus diesem Signalflußgraphen unmittelbar die beiden Übertragungsfunktionen

$$F_{S1}(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^6 + 8s^5 + 35s^4 + 98s^3 + 158s^2 + 128s + 40} \quad (3.21)$$

und

$$F_{S2}(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{4s^4 + 4s^3 - 26s^2 + s + 18}{s^6 + 8s^5 + 35s^4 + 98s^3 + 158s^2 + 128s + 40} \quad (3.22)$$

der Strecke. Mit dem Zustandsregler sollen die Pole der Regelstrecke nach $s_{1/2}^g = -2 \pm 2i$, $s_{3/4}^g = -2 \pm 2i$ und $s_{5/6}^g = -3$ geschoben werden. Damit lautet das charakteristische Polynom der geregelten Strecke

$$\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = \prod_{i=1}^6 (s - s_i^g) \quad (3.23)$$

$$= s^6 + 14s^5 + 89s^4 + 328s^3 + 736s^2 + 960s + 576.$$

Der Beobachtungsindex der Strecke wurde in Kapitel 2.2 zu $v=3$ bestimmt. Folglich lautet das charakteristische Polynom $(v-1)$ -ter Ordnung des Beobachters mit den vorgegebenen Polen bei $s=-4$

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}) = s^2 + 8s + 16. \quad (3.24)$$

Damit sind alle Bestimmungsgrößen für den Zustandsregler bekannt. Die Koeffizienten der Regler-Übertragungsfunktionen ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems (3.14), das mit den obigen Werten folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 35 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 98 & 35 & 1 & 0 & 0 & -26 & 4 & 4 \\ 158 & 98 & 2 & 1 & 0 & 1 & -26 & 4 \\ 128 & 158 & 10 & 2 & 1 & 18 & 1 & -26 \\ 40 & 128 & 0 & 10 & 2 & 0 & 18 & 1 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -\frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \\ 89 & 14 \\ 328 & 89 \\ 736 & 328 \\ 960 & 736 \\ 576 & 960 \\ 0 & 576 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 89 & -35 \\ 328 & -98 \\ 736 & -158 \\ 960 & -128 \\ 576 & -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder nach Zusammenfassung der rechten Seite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 35 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 98 & 35 & 1 & 0 & 0 & -26 & 4 & 4 \\ 158 & 98 & 2 & 1 & 0 & 1 & -26 & 4 \\ 128 & 158 & 10 & 2 & 1 & 18 & 1 & -26 \\ 40 & 128 & 0 & 10 & 2 & 0 & 18 & 1 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -1_2^1 \\ -1_1^1 \\ -1_0^1 \\ -1_2^2 \\ -1_1^2 \\ -1_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 182 \\ 1166 \\ 4626 \\ 11968 \\ 19992 \\ 19968 \\ 9216 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Da die Beziehung $m=n$ gilt, hat dieses Gleichungssystem eine eindeutig bestimmte Lösung der Form

$$\begin{aligned} p_1 &= 14 ; & p_0 &= 89.763 ; \\ 1_2^1 &= -131.56 ; & 1_1^1 &= -681.23 ; & 1_0^1 &= -618.97 ; \\ 1_2^2 &= 4.9407 ; & 1_1^2 &= 5.5850 ; & 1_0^2 &= 31.345 . \end{aligned}$$

Der gesuchte Zustandsregler besitzt somit die Übertragungsfunktionen

$$\frac{U(s)}{Y_1(s)} = \frac{-131.56s^2 - 681.23s - 618.97}{s^2 + 14s + 89.763} \quad (3.26)$$

und

$$\frac{U(s)}{Y_2(s)} = \frac{4.9407s^2 + 5.5850s + 31.345}{s^2 + 14s + 89.763} . \quad (3.27)$$

Legt man die Nullstellen des Führungskanals auf die Beobachterpole, so folgt schließlich noch

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{57.6 (s^2 + 8s + 16)}{s^2 + 14s + 89.763} . \quad (3.28)$$

Wählt man für die Realisierung der Regler-Übertragungsfunktionen die sogenannte "Beobachternormalform" [2], so ergibt sich für den betrachteten Zustandsregelkreis der in Bild 3.2 dargestellte Signalflußgraph.

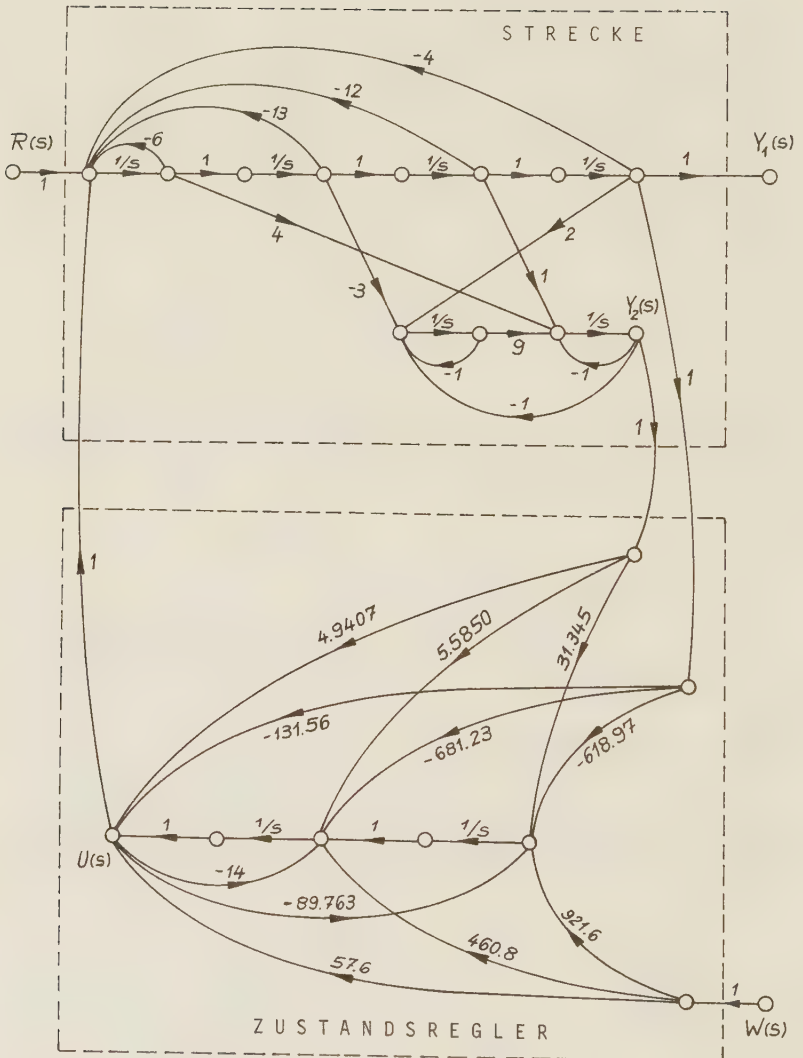


Bild 3.2

Ein Vergleich mit dem Reglerentwurf in Kapitel 2.2 zeigt, daß der Rechenaufwand beim Reglerentwurf im Frequenzbereich wesentlich kleiner ist als im Zeitbereich. Beim Zeitbereichsentwurf des Reglers mußten ein lineares Gleichungssystem n -ter Ordnung zur Bestimmung von $\underline{k}^T$ und ein lineares Gleichungssystem $n\nu$ -ter Ordnung zur Berechnung des Beobachters gelöst werden; also insgesamt $n(\nu+1) = 24$ Gleichungen.

Der Frequenzbereichsentwurf geschieht dagegen anhand der Lösung eines einzigen linearen Gleichungssystems der Ordnung $(n+\nu-1) = 8$.

Der größere Rechenaufwand beim Zeitbereichsentwurf ist durch die explizite Berechnung des Beobachters bedingt. Wenn der Beobachter nur die Information für die Bildung der Stellgröße liefern muß, ist die explizite Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Strecken- und Beobachterzustand überflüssig.

Beim Frequenzbereichsentwurf wird keine Aussage über den Zusammenhang zwischen Regler- und Streckenzustand gemacht, was zu einer wesentlichen Rechenvereinfachung führt. Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, läßt sich der Zusammenhang zwischen dem Zustand des im Frequenzbereich entworfenen Zustandsreglers und dem Zustand der Strecke nachträglich rekonstruieren.

4 DER IM FREQUENZBEREICH ENTWORFENE ZUSTANDSREGLER ALS BEOBACHTER

Während beim Zustandsreglerentwurf im Zeitbereich der Beobachter explizit berechnet wird, taucht die Beobachtereigenschaft des Zustandsreglers beim Frequenzbereichsentwurf nur bei der Vorgabe der Beobachterpole auf. Da aber fast jedes lineare System einen Beobachter darstellt [15], kann auch vom Zustand des im Frequenzbereich entworfenen Zustandsreglers auf den Streckenzustand rückgeschlossen werden.

Um die Untersuchungen nicht unnötig zu belasten, wird zunächst der einläufige, nicht erregte Zustandsregelkreis betrachtet, der in Bild 4.1 dargestellt ist.

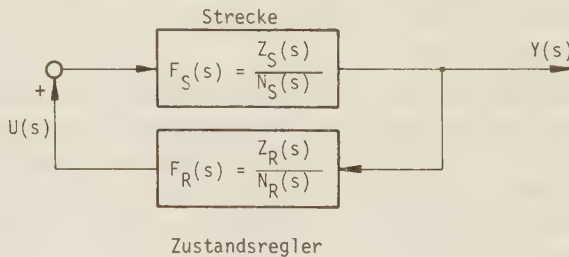


Bild 4.1

In Zustandsraumdarstellung lauten die Gleichungen der Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ y &= \underline{c}^T \underline{x}\end{aligned}\quad (4.1)$$

und des Zustandsreglers

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\tilde{z}}} &= \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{z}} + \underline{\tilde{d}} y \\ u &= \underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{z}} + \underline{\tilde{g}} y\end{aligned}\quad (4.2)$$

wobei die Form der Matrix $\underline{\tilde{F}}$ und der Vektoren $\underline{\tilde{d}}$ und $\underline{\tilde{e}}$ von der Struktur der Realisierung von $F_R(s)$ abhängt.

Gesucht wird der Zusammenhang

$$\underline{\tilde{z}} = \underline{\tilde{T}} \underline{x}\quad (4.3)$$

zwischen dem Zustand $\underline{\tilde{z}}$ des im Frequenzbereich entworfenen Reglers und dem Zustand $\underline{x}$ der Strecke. Setzt man $\underline{\tilde{z}} = \underline{\tilde{T}} \underline{x}$ in die Reglergleichung

(4.2) ein, so folgt

$$\tilde{T} \dot{\underline{x}} = \tilde{F} \tilde{T} \underline{x} + \tilde{d} \underline{y} \quad (4.4)$$

und $\underline{u} = \tilde{e}^T \tilde{T} \underline{x} + \tilde{g} \underline{y} \quad (4.5)$

Multipliziert man andererseits die Streckengleichung (4.1) von links mit $\tilde{T}$, so ergibt sich

$$\tilde{T} \dot{\underline{x}} = \tilde{T} \underline{A} \underline{x} + \tilde{T} \underline{b} \underline{u} \quad ,$$

oder mit dem Ausdruck (4.5) für $\underline{u}$

$$\tilde{T} \dot{\underline{x}} = \tilde{T} \underline{A} \underline{x} + \tilde{T} \underline{b} \tilde{e}^T \tilde{T} \underline{x} + \tilde{T} \underline{b} \tilde{g} \underline{y} \quad (4.6)$$

Vergleicht man nun die rechten Seiten der Gleichungen (4.4) und (4.6) so folgt unter Berücksichtigung von $\underline{y} = \underline{c}^T \underline{x}$

$$\tilde{T} \underline{A} + \tilde{T} \underline{b} \tilde{e}^T \tilde{T} + \tilde{T} \underline{b} \tilde{g} \underline{c}^T = \tilde{F} \tilde{T} + \tilde{d} \underline{c}^T \quad (4.7)$$

Wegen $\underline{u} = \underline{k}^T \underline{x} = \tilde{e}^T \tilde{T} \underline{x} + \tilde{g} \underline{y}$

gilt $\underline{k}^T = \tilde{e}^T \tilde{T} + \tilde{g} \underline{c}^T \quad (4.8)$

Berücksichtigt man die Beziehung (4.8) in Gleichung (4.7), so folgt schließlich die Bestimmungsgleichung für $\tilde{T}$ zu

$$\tilde{T} (\underline{A} + \underline{b} \underline{k}^T) - \tilde{F} \tilde{T} = \tilde{d} \underline{c}^T \quad (4.9)$$

Diese Gleichung entspricht der bekannten Bedingung für den LUENBERGER-Beobachter, wobei jedoch in Gleichung (4.9) anstelle der Matrix der freien Strecke die Matrix der geregelten Strecke auftritt.

Der Zustandsregler beobachtet also die Zustandsgrößen der geregelten Strecke. Der Zusammenhang zwischen Strecken- und Reglerzustand wird durch die Beziehung (4.3) gegeben, wobei sich die Matrix $\tilde{T}$ aus der Gleichung (4.9) berechnen läßt.

Die Dynamik, mit der diese Beobachtung geschieht, wird weiterhin durch die beim Reglerentwurf vorgegebenen Eigenwerte des Beobachters bestimmt. Dies läßt sich zeigen, indem man die Differentialgleichung des Schätzfehlers

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{z}} - \tilde{T} \underline{x} \quad (4.10)$$

untersucht. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{\tilde{x}}} &= \dot{\underline{\tilde{z}}} - \underline{\tilde{T}} \dot{\underline{x}} \\
 &= \underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{z}} + \underline{\tilde{d}} y - \underline{\tilde{T}} \underline{A} \underline{x} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} u \\
 &= \underline{\tilde{F}} (\underline{\tilde{z}} + \underline{\tilde{T}} \underline{x}) + \underline{\tilde{d}} \underline{c}^T \underline{x} - \underline{\tilde{T}} \underline{A} \underline{x} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T (\underline{\tilde{z}} + \underline{\tilde{T}} \underline{x}) - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{g}} \underline{c}^T \underline{x} \\
 &= (\underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T) \underline{\tilde{z}} + (\underline{\tilde{F}} \underline{\tilde{T}} - \underline{\tilde{T}} \underline{\tilde{A}} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{k}}^T + \underline{\tilde{d}} \underline{c}^T) \underline{x}
 \end{aligned}$$

und schließlich mit Gleichung (4.9)

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = (\underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T) \underline{\tilde{x}} \quad (4.11)$$

Die Dynamik des Schätzfehlers wird also durch die Matrix $(\underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{T}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T)$ festgelegt. Die Eigenwerte dieser Matrix können über einen Vergleich zwischen Frequenz- und Zeitbereichsentwurf des Zustandsreglers bestimmt werden. Der betrachtete einläufige Zustandsregelkreis ohne äußere Eingriffe stellt sich beim Zeitbereichsentwurf in der in Bild 4.2 gezeigten Weise dar.

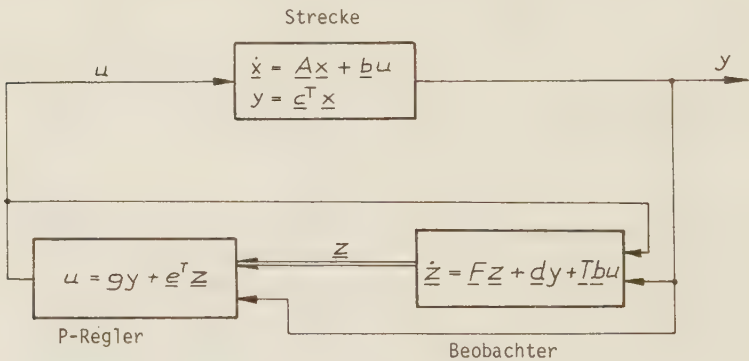


Bild 4.2

Berücksichtigt man die Rückführung der Stellgröße u in den Beobachter, so lauten die Gleichungen des Zustandsreglers nach Bild 4.2

$$\dot{\underline{z}} = (\underline{F} + \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T) \underline{z} + (\underline{d} + \underline{I} \underline{b} \underline{g}) y \quad (4.12)$$

$$u = \underline{e}^T \underline{z} + g y$$

mit $\underline{z} = \underline{I} \underline{x}$

Die Gleichungen (4.2) und (4.12) beschreiben verschiedene Realisierungen desselben Zustandsreglers. Durch eine lineare Transformation

$$\underline{\tilde{z}} = \underline{R} \underline{z} \quad (4.13)$$

können beide ineinander überführt werden. Setzt man $\underline{\tilde{z}} = \underline{R} \underline{z}$ in die Reglergleichungen (4.12) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{R}^{-1} \dot{\underline{\tilde{z}}} &= (\underline{F} + \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T) \underline{R}^{-1} \underline{\tilde{z}} + (\underline{d} + \underline{I} \underline{b} \underline{g}) y \\ u &= \underline{e}^T \underline{R}^{-1} \underline{\tilde{z}} + g y, \end{aligned}$$

oder nach Multiplikation der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\tilde{z}}} &= \underline{R} (\underline{F} + \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T) \underline{R}^{-1} \underline{\tilde{z}} + \underline{R} (\underline{d} + \underline{I} \underline{b} \underline{g}) y \\ u &= \underline{e}^T \underline{R}^{-1} \underline{\tilde{z}} + g y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Damit ergeben sich für den Zusammenhang zwischen einer beliebigen Realisierung des Zustandsreglers nach Gleichung (4.2) und der über den Zeitbereichsentwurf erhaltenen Regler-Realisierung nach Gleichung (4.12) folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{I}} &= \underline{R} \underline{I} \\ \underline{\tilde{F}} &= \underline{R} (\underline{F} + \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T) \underline{R}^{-1} \\ \underline{\tilde{d}} &= \underline{R} (\underline{d} + \underline{I} \underline{b} \underline{g}) \\ \underline{\tilde{e}}^T &= \underline{e}^T \underline{R}^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

und $\underline{\tilde{g}} = g$.

Anhand dieser Beziehungen lassen sich die Eigenwerte der Matrix $(\underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{I}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T)$ sehr einfach ermitteln. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{I}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T &= \underline{R} (\underline{F} + \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T) \underline{R}^{-1} - \underline{R} \underline{I} \underline{b} \underline{e}^T \underline{R}^{-1} \\ &= \underline{R} \underline{F} \underline{R}^{-1}. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte einer Matrix durch eine lineare Transformation nicht verändert werden [28], folgt damit

$$\det (\underline{s} \underline{I} - \underline{\tilde{F}} + \underline{\tilde{I}} \underline{b} \underline{\tilde{e}}^T) = \det (\underline{s} \underline{I} - \underline{F}). \quad (4.16)$$

Damit geschieht die Beobachtung der Zustandsgrößen der geregelten Strecke durch den Regler mit der Dynamik, die für den Beobachter vorgegeben wurde.

Für Strecken mit $m > 1$ ergibt sich dieselbe Bestimmungsgleichung für $\underline{\tilde{I}}$, wobei jedoch $\underline{\tilde{d}}$ und $\underline{c}^T$ durch $\underline{\tilde{D}}$ und $\underline{C}$ zu ersetzen sind.

5 DER ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN MIT I-ANTEIL IM ZEITBEREICH

Das Führungsverhalten der bisher betrachteten Zustandsregelkreise verläuft mit einer Dynamik, die allein durch die gewünschten Streckenpole bestimmt wird. In das Störverhalten gehen dagegen die Beobachterpole mit ein. Ihr Einfluß läßt sich jedoch durch einen "schnellen Beobachter" klein halten. Was sich durch die Wahl der Beobachterpole nicht vollständig unterdrücken läßt, ist die bleibende Regelabweichung nach einem Störsprung.

Der in der Regelungstechnik übliche Weg zur Beseitigung solcher bleibenden Regelabweichungen ist die Einführung eines Integralanteils, die auch bei Zustandsreglern möglich ist.

Da der Zustandsregler vom Konzept her ein reiner P-Regler ist, wird der notwendige I-Anteil formal der Strecke zugeschlagen [24], [19]. Dies geschieht dadurch, daß der Streckenzustand um eine Zustandsgröße x_{n+1} erweitert wird, deren zeitliche Ableitung gleich der Differenz zwischen Regel- und Führungsgröße ist. Für die so erweiterte Strecke kann nun ein Zustandsregler in der üblichen Form konstruiert werden.

Die Erweiterung einer Strecke n-ter Ordnung mit m Ausgängen (y_1 Regelgröße) um den I-Anteil zeigt Bild 5.1.

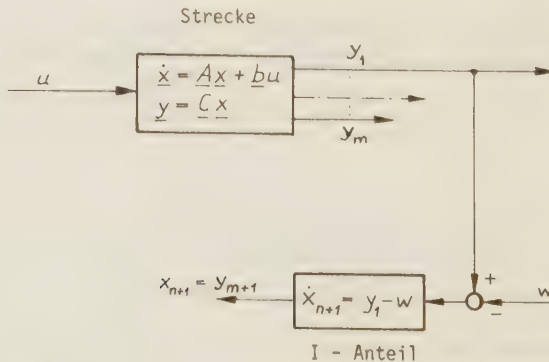


Bild 5.1

Die so erweiterte Regelstrecke hat die Ordnung $n+1$ und genügt den Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{A}^* \underline{x}^* + \underline{b}_1^* u + \underline{b}_2^* w \quad (5.1)$$

$$\underline{y}^* = \underline{C}^* \underline{x}^* ,$$

mit dem $(n+1)$ -dimensionalen Zustandsvektor

$$\underline{x}^{*T} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n+1}) ,$$

dem $(m+1)$ -dimensionalen Ausgangsvektor

$$\underline{y}^{*T} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{m+1}) ,$$

der $(n+1) \times (n+1)$ -Systemmatrix

$$\underline{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ,$$

der $(m+1) \times (n+1)$ - Ausgangsmatrix

$$\underline{C}^* = \begin{pmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{n-1}^1 & 0 \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_{n-1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_0^m & c_1^m & \dots & c_{n-1}^m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und den $(n+1)$ -Eingangsvektoren

$$\underline{b}_1^{*T} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0)$$

$$\text{und} \quad \underline{b}_2^{*T} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1) .$$

Für die erweiterte Strecke wird ein Zustandsregler mit

$$u^* = \underline{k}^{*T} \underline{x}^* \quad (5.2)$$

so entworfen, daß das charakteristische Polynom der geregelten Strecke

$$\det (s\underline{I} - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^{*T}) = s^{n+1} + \beta_n^* s^n + \dots + \beta_1^* s + \beta_0^* \quad (5.3)$$

eine gewünschte Form erhält.

Der Beobachter für das lineare Funktional (5.2) besitzt wiederum die Ordnung $(\gamma-1)$ und genügt der Gleichung

$$\dot{\underline{z}}^* = \underline{F}^* \underline{z}^* + \underline{D}^* \underline{y}^* + \underline{T}^* \underline{b}_1^* \underline{u}^* + \underline{T}^* \underline{b}_2^* \underline{w}, \quad (5.4)$$

wobei wiederum die entsprechenden Beziehungen

$$\underline{z}^* = \underline{T}^* \underline{x}^* \quad (5.5)$$

$$\underline{T}^* \underline{A}^* - \underline{F}^* \underline{T}^* = \underline{D}^* \underline{C}^* \quad (5.6)$$

und $\underline{u}^* = \underline{g}^{*T} \underline{y}^* + \underline{e}^{*T} \underline{z}^* \quad (5.7)$

mit $\underline{k}^{*T} = \underline{g}^{*T} \underline{C}^* + \underline{e}^{*T} \underline{T}^*$

gelten. Bild 5.2 zeigt den Zustandsregelkreis mit I-Anteil sowie Führungs- und Störeingriffen analog zu Kapitel 2.

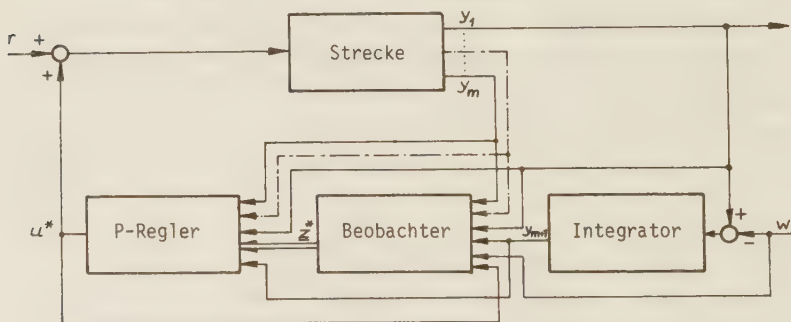


Bild 5.2

Nach Einsetzen von $\underline{u}^*$ in die Strecken- und Beobachtergleichungen und nach Berücksichtigung des Störeingriffs ergeben sich die Zustandsgleichungen des Regelkreises nach Bild 5.2 zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}^* \\ \dot{\underline{z}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}^* + \underline{b}_1^* \underline{g}^{*T} \underline{C}^* & \underline{b}_1^* \underline{e}^{*T} \\ \underline{D}^* \underline{C}^* + \underline{T}^* \underline{b}_1^* \underline{g}^{*T} \underline{C}^* & \underline{F}^* + \underline{T}^* \underline{b}_1^* \underline{e}^{*T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}^* \\ \underline{z}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}_2^* \\ \underline{T}^* \underline{b}_2^* \end{pmatrix} \underline{w} + \begin{pmatrix} \underline{b}_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \underline{r} \quad (5.8)$$

+) Man kann auch den in Kapitel 2 benutzten Beobachter für die nicht erweiterte Strecke verwenden, was formal dem Nullsetzen der letzten Spalte in $\underline{D}^*$ und $\underline{T}^*$ entspricht.

Diese Gleichungen haben dieselbe Gestalt wie die in [8] für Strecken mit einem Ausgang erhaltenen. Die dortigen Ergebnisse bezüglich Stör- und Führungsverhalten können deshalb sinngemäß übernommen werden. Die Führungsübertragungsfunktionen des Zustandsregelkreises mit I-Anteil nach Bild 5.2 lauten demnach

$$F_{wi}^*(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{-k_{n+1}^* (c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i)}{\det(s\underline{I} - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^{*T})}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (5.9)$$

und die Störübertragungsfunktionen

$$F_{ri}^*(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{s(c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i) \det(s\underline{I} - \underline{F}^* - \underline{T}^* \underline{b}_1^* \underline{e}^{*T})}{\det(s\underline{I} - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^{*T}) \det(s\underline{I} - \underline{F}^*)}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (5.10)$$

Durch die Hinzufügung des I-Anteils hat sich die Ordnung des Regelkreises um eins erhöht. Die Dynamik des Beobachters hat weiterhin keinen Einfluß auf das Führungsverhalten des Regelkreises, wohl aber auf das Störverhalten.

Da die Beziehung

$$\beta_0^* = -c_0^1 k_{n+1}^* \quad (5.11)$$

immer erfüllt ist, folgt die Regelgröße y_1 einem Führungssprung $w(t) = 1(t)$ ohne bleibende Regelabweichung. Es gilt also

$$\lim_{s \rightarrow 0} F_{w1}^*(s) = 1$$

und wegen der Nullstelle bei $s=0$ in den Störübertragungsfunktionen

$$\lim_{s \rightarrow 0} F_{ri}^*(s) = 0 \quad \text{für } i=1,2,\dots,m$$

Durch die Einführung eines I-Anteils verschwindet die bleibende Regelabweichung sowohl nach Führungs- wie auch nach Störsprüngen, wobei die Dynamik des Übergangsvorgangs aufgrund der freien Polwahl wunschgemäß festgelegt werden kann.

6 ENTWURF VON ZUSTANDSREGLERN MIT I-ANTEIL IM FREQUENZBEREICH

6.1 Das Entwurfsverfahren

Beim Zeitbereichsentwurf eines Zustandsreglers mit I-Anteil (Kapitel 5) wird der I-Anteil des Reglers formal der Strecke zugeschlagen. Die Zustandsrückführung für die erweiterte Strecke wird dann so bestimmt, daß das charakteristische Polynom der geregelten Strecke mit I-Anteil

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^* \underline{x}^*) = s^{n+1} + \beta_n^* s^n + \dots + \beta_1^* s + \beta_0^* \quad (6.1)$$

eine gewünschte Form erhält. Der Beobachter für das lineare Funktional $u^* = \underline{k}^* \underline{x}^*$ ist von $(\nu-1)$ -ter Ordnung und besitzt ein frei vorgegbares charakteristisches Polynom der Form

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}^*) = s^{\nu-1} + \varphi_{\nu-2} s^{\nu-2} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0 \quad (6.2)$$

Beim Reglerentwurf im Frequenzbereich ist eine Erweiterung der Strecke um den Regler-I-Anteil nicht notwendig. Der I-Anteil wird statt dessen direkt im Ansatz für die Reglerübertragungsfunktion berücksichtigt.

Man geht wiederum von den Übertragungsfunktionen der betrachteten Strecken n -ter Ordnung mit m Ausgängen

$$F_{Si}(s) \frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{c_{n-1}^i s^{n-1} + \dots + c_1^i s + c_0^i}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad (6.3)$$

aus und setzt analog zum Vorgehen in Kap. 3 die Übertragungsfunktionen des Zustandsreglers mit I-Anteil in der Form

$$F_{Ri}^*(s) = \frac{Z_{Ri}^*(s)}{N_R^*(s)} \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{und} \quad F_{Rw}^*(s) = \frac{Z_{Rw}^*(s)}{N_R^*(s)} \quad (6.4)$$

mit

$$U^*(s) = F_{Rw}^*(s) W(s) + \sum_{i=1}^m F_{Ri}^*(s) Y_i(s) \quad (6.5)$$

an.

Das Blockschaltbild des Zustandsregelkreises zeigt Bild 6.1.

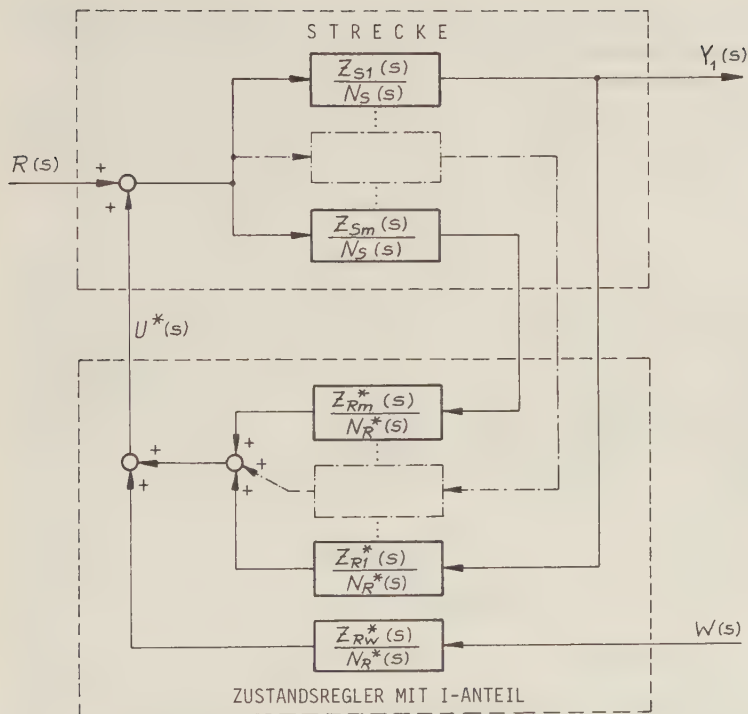


Bild 6.1

Die Übertragungsfunktionen des Zustandsregelkreises mit I-Anteil nach Bild 6.1 lauten

$$F_{wi}^*(s) = \frac{Y_i(s)}{W(s)} = \frac{Z_{Si}(s) Z_{Rw}^*(s)}{N_S(s) N_R^*(s) - \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}^*(s)}, \quad (6.6)$$

$i=1,2,\dots,m$

und

$$F_{ri}^*(s) = \frac{Y_i(s)}{R(s)} = \frac{Z_{Si}(s) N_R^*(s)}{N_S(s) N_R^*(s) - \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}^*(s)}, \quad (6.7)$$

$i=1,2,\dots,m$

Da sich die Regelkreise in Bild 5.2 und Bild 6.1 entsprechen, müssen auch ihre Übertragungsfunktionen identisch sein. Aus einem Vergleich der Übertragungsfunktionen (5.9) und (6.6) sowie (5.10) und (6.7) folgt

$$N_S(s) N_R^*(s) - \sum_{j=1}^m Z_{Sj}(s) Z_{Rj}^*(s) = \det(sI - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^{*T}) \det(sI - \underline{F}^*) \quad (6.8)$$

$$N_R^*(s) = s \det(sI - \underline{F}^* - \underline{I}^* \underline{b}_1^* \underline{e}^{*T}) \quad (6.9)$$

$$Z_{Rw}^*(s) = -k_{n+1}^* \det(sI - \underline{F}^*) \quad (6.10)$$

Der Nenner der Reglerübertragungsfunktion $N_R^*(s)$ besitzt also eine Nullstelle bei $s=0$ und hat die Ordnung ν . Bei Strecken mit einem Eingang läßt sich nur für eine Regelgröße eine unabhängige Führungsgröße vorgeben. Es genügt deshalb, den I-Anteil im Kanal der entsprechenden Regelgröße (nach Voraussetzung y_1) vorzusehen.

Damit können die Polynome in den Reglerübertragungsfunktionen in folgender Form angesetzt werden

$$N_R^*(s) = s(s^{\nu-1} + p_{\nu-2}s^{\nu-2} + \dots + p_1s + p_0) \quad (6.11)$$

$$Z_{R1}^*(s) = l_{\nu}^1 s^{\nu} + l_{\nu-1}^1 s^{\nu-1} + \dots + l_1^1 s + l_0^1 \quad (6.12)$$

$$Z_{Ri}^*(s) = l_{\nu}^i s^{\nu} + l_{\nu-1}^i s^{\nu-1} + \dots + l_1^i s, \quad i=2,3,\dots,m. \quad (6.13)$$

Die Gleichung (6.8) kann für beliebige Polynome $\det(sI - \underline{A}^* - \underline{b}_1^* \underline{k}^{*T})$ und $\det(sI - \underline{F}^*)$ nur dann gelöst werden, wenn in den Reglerübertragungsfunktionen $F_{Ri}^*(s)$, $i=1,2,\dots,m$ mindestens $(n+\nu)$ freie Parameter vorhanden sind.

Durch den Ansatz der F_{Ri}^* nach Gleichung (6.11)-(6.13) ergeben sich $(m+1)\nu$ freie Parameter p_j und l_i^k . Wegen $m\nu \geq n$ ist damit die Anzahl der freien Parameter gerade größer oder gleich der Anzahl der benötigten.

Deckt man in der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises lediglich die Beobachterpole - wie beim Zeitbereichsentwurf - ab, so besitzt das Zählerpolynom von $F_{Rw}^*(s)$ die Form

$$Z_{Rw}^*(s) = \beta_0^* / c_0 \cdot 1 (s^{\nu-1} + \varphi_{\nu-2} s^{\nu-2} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0) \quad (6.14)$$

Der Grad des Zählerpolynoms von $F_{RW}^*(s)$ ist damit um eins kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Diesen Freiheitsgrad kann man dazu benutzen, eine zusätzliche Nullstelle bei $s=-\alpha$ in der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises zu erzeugen. Die Reglerübertragungsfunktion des Führungskanals erhält dann die Form

$$F_{RW}^*(s) = \frac{\beta_o^* / (c_o 1 \alpha) (s+\alpha) (s^{v-1} + \varphi_{v-2} s^{v-2} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0)}{s(s^{v-1} + p_{v-2} s^{v-2} + \dots + p_1 s + p_0)} \quad (6.15)$$

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, die Nullstellen von $F_{RW}^*(s)$ nicht auf die Beobachterpole, sondern z.B. auf langsamere Streckenpole zu legen.

Der Koeffizientenvergleich der beiden Polynome $(n+v)$ -ter Ordnung in s , der bei der Lösung von Gleichung (6.8) durchgeführt werden muß, kann wiederum in Matrixform angegeben werden. Er lautet [10]

$$\underline{K}_h^* \underline{h}^* = \underline{B}^* \underline{\varphi}^* + \underline{d}^* \quad (6.16)$$

mit dem $(m+1)v$ -dimensionalen Parametervektor

$$\underline{h}^{*T} = (p_{v-2} \dots p_1 p_0 | -1_v^1 \dots -1_1^1 | -1_0^1 | -1_v^2 \dots -1_2^2 | -1_1^2 | \dots | -1_v^m \dots -1_2^m | -1_1^m),$$

der $[(n+v) \times (m+1)v]$ - Koeffizientenmatrix

$$\underline{K}_h^* = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ a_{n-1} & 1 & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{v-2} \\ a_0 & & \dots & a_{v-3} \\ \underline{0} & & & a_0 \\ & & & 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} c_{n-1}^1 & & & \\ c_{n-2}^1 & c_{n-1}^1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{v-1}^1 \\ c_0^1 & & \dots & c_{v-1}^1 \\ \underline{0} & & & c_0^1 \end{array} & \begin{array}{cccc} c_{n-1}^2 & & & \\ c_{n-2}^2 & c_{n-1}^2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_{v-1}^2 \\ c_0^2 & & \dots & c_{v-2}^2 \\ \underline{0} & & & c_0^2 \end{array} & \begin{array}{cccc} c_{n-1}^m & & & \\ c_{n-2}^m & c_{n-1}^m & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0^m & c_1^m & \dots & c_{v-1}^m \\ c_0^m & & \dots & c_{v-2}^m \\ \underline{0} & & & c_0^m \\ & & & 0 \end{array} \end{array} \right),$$

der $[(n+v) \times (v-1)]$ - Matrix,

dem $(n+v)$ - dimensionalen Vektor

$$\underline{B}^* \varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \beta_n^* & 1 & & & \\ \beta_{n-1}^* & \beta_n^* & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \beta_0^* & \beta_1^* & \dots & \beta_{v-2}^* & \\ & \beta_0^* & \dots & \beta_{v-3}^* & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \beta_0^* \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}^* = \begin{pmatrix} \beta_n^* & - & a_{n-1} \\ \beta_{n-1}^* & - & a_{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^* & - & a_0 \\ & \beta_0^* & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

und dem $(v-1)$ -dimensionalen Vektor

$$\underline{\varphi}^T = (\varphi_{v-2} \dots \varphi_1 \varphi_0).$$

Die Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems (6.16) läßt sich wiederum mit Hilfe der Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{\bar{Q}}$ der Regelstrecke beantworten. Verschiebt man die $2v$ -te Spalte von $\underline{K}_h^*$ durch elementare Umformungen nach rechts, so ergibt sich die Matrix $\underline{\tilde{K}}_h^*$ in der Form

$$\underline{\tilde{K}}_h^* = \left(\begin{array}{c|c} \underline{K}_h & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n-1}^1 \\ \vdots \\ c_1^1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_0^1 \end{matrix} \end{array} \right).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß $\underline{K}_h^*$ genau dann vollen Rang hat, wenn $\underline{K}_h$ vollen Rang besitzt und wenn $c_0^1 \neq 0$ ist. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß $\underline{K}_h$ genau dann vollen Rang besitzt, wenn die Regelstrecke vollständig steuerbar und beobachtbar ist. Die Bedingung $c_0^1 \neq 0$ ist sinnvoll, da für $c_0^1 = 0$ die bleibende Regelabweichung nach einem Störsprung $r(t)=1(t)$ auch ohne I-Anteil im Regler verschwindet und auch mit einem I-Anteil technisch nicht erreicht werden kann, daß die Regelgröße y_1 einem Führungssprung ohne bleibende Regelabweichung folgt.

Für $mv = n$ ist das Gleichungssystem (6.16) eindeutig lösbar, während sonst $(mv-n)$ Parameter vorgegeben werden müssen.

Für $m = 1$ ist $v=n$ und damit $\underline{K}_h^*$ quadratisch. Bei Strecken mit einem Eingang und einem Ausgang muß bei der Konstruktion eines Zustandsreglers mit I-Anteil im Frequenzbereich also lediglich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem $2n$ -ter Ordnung gelöst werden.

6.2 BEISPIEL

In diesem Kapitel wird die Konstruktion eines Zustandsreglers mit I-An-
teil für eine Strecke dritter Ordnung mit einem Eingang und zwei Aus-
gängen durchgeführt. Die Streckenübertragungsfunktionen besitzen die
Gestalt

$$F_{S1}(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{4s + 8}{s^3 + 3s^2 + 12s + 10} \quad (6.17)$$

und

$$F_{S2}(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{2(s + 1)}{(s^2 + 2s + 10)(s + 1)} \quad (6.18)$$

Die Streckenpole und der Integratorpol sollen von $s_{1/2}^o = -1 \pm 3i$, $s_3^o = -1$
und $s_4^o = 0$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_{3/4}^g = -5$ verschoben werden. Der Beob-
achterpol soll bei $s = -10$ liegen.

Das charakteristische Polynom (6.1) der geregelten Strecke (plus I-Pol)
ergibt sich aus den vorgegebenen s_i^g zu

$$s^4 + \beta_3^* s^3 + \beta_2^* s^2 + \beta_1^* s + \beta_0^* = s^4 + 16s^3 + 98s^2 + 280s + 325 \quad (6.19)$$

Die Zustandsgleichungen der Strecke in der Normalform (2.1) lassen
sich unmittelbar angeben. Sie lauten

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ \underline{y} &= \underline{c} \underline{x} \end{aligned} \quad (6.20)$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -12 & -3 \end{pmatrix} ; \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \underline{c} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix

$$\bar{Q} = (\underline{c}^T, \underline{A}^T \underline{c}^T) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt den Rang 3 und damit ist $\nu = 2$.

Der notwendige Beobachter ist also von erster Ordnung. Sein charakteri-
stisches Polynom lautet somit

$$s + \varphi_o = s + 10 \quad (6.21)$$

Setzt man die gegebenen Werte in Gleichung (6.16) ein, so folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 10 & 0 & 8 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_o \\ -l_1^4 \\ -l_1^4 \\ -l_o^4 \\ -l_2^2 \\ -l_2^2 \\ -l_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 98 \\ 280 \\ 325 \end{pmatrix} 10 + \begin{pmatrix} 16-3 \\ 98-12 \\ 280-10 \\ 325 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $mv-n=1$ ist ein Parameter des Reglers frei vorgebar. Diese Vorgabe muß so geschehen, daß sich entweder der Rang der Koeffizientenmatrix nicht erniedrigt, oder bei einer Reduzierung des Ranges die rechte Seite verträglich bleibt. Dadurch verbietet sich z.B. die Wahl von $p_o=0$ oder von $l_o^4=0$. Setzt man hingegen $l_2^4=0$, so ergibt sich das eindeutig lösbares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_o \\ -l_1^4 \\ -l_1^4 \\ -l_o^4 \\ -l_2^2 \\ -l_2^2 \\ -l_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 246 \\ 1250 \\ 3125 \\ 3250 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} p_o &= 23 \\ l_1^4 &= -118.25 & l_o^4 &= -406.25 \\ l_2^2 &= -88.5 & l_4^2 &= -162 \end{aligned}$$

Deckt man zusätzlich zum Beobachterpol noch einen Pol bei $s=-5$ in der Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises ab, so ergibt sich mit $\beta^*/c_o^1\alpha = 8.125$ die Übertragungsfunktion für den Führungskanal des Reglers zu

$$F_{Rw}^*(s) = \frac{8.125 s^2 + 121.875 s + 406.25}{s(s+23)}$$

Bild 6.2 zeigt ein Blockschaltbild des berechneten Zustandsregelkreises mit I-Anteil.

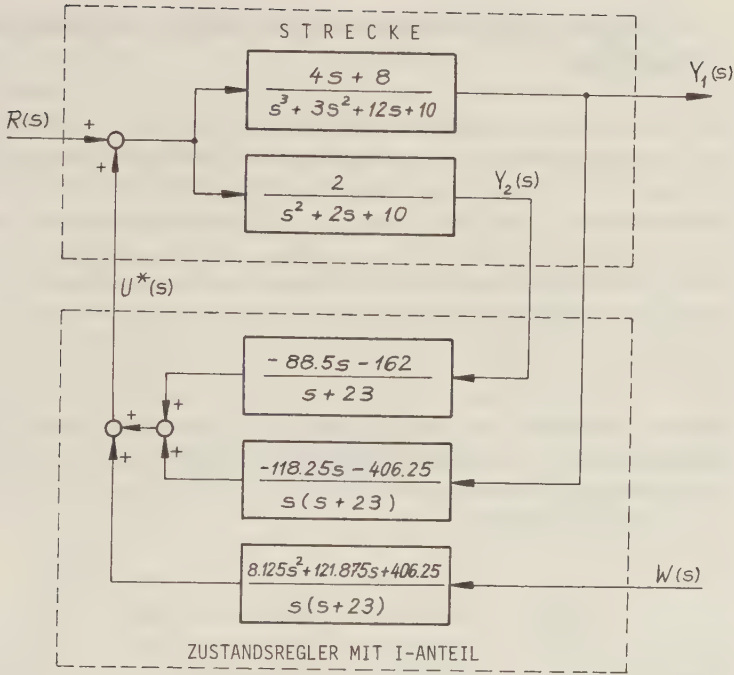


Bild 6.2

Die Realisierung der Reglerübertragungsfunktionen kann in einem Netzwerk zweiter Ordnung geschehen. Bild 6.3 zeigt eine einfache Realisierung, in der die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion als Zweigverstärkungen auftreten.

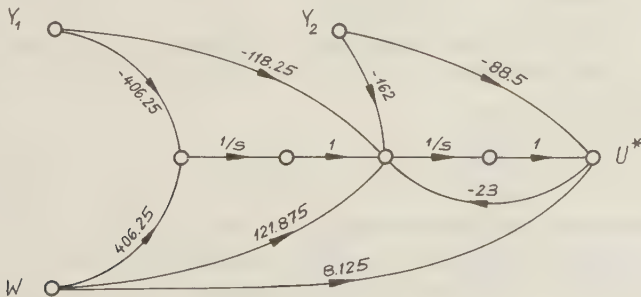


Bild 6.3

7. EINFLUSS DER REGLER-REALISIERUNG AUF DAS VERHALTEN DES ZUSTANDS- REGLERKREISES

Mit der Berechnung der Zustandsgleichungen oder der Übertragungsfunktion des Zustandsreglers ist der Reglerentwurf theoretisch abgeschlossen. Den Praktiker interessiert jedoch vor allem die Frage, wie der berechnete Regler realisiert werden kann. Der Zeitbereichsentwurf liefert eine konkrete Vorschrift für den Aufbau des Zustandsreglers, während der Frequenzbereichsentwurf die Frage nach der Realisierung der Reglerübertragungsfunktion offen läßt.

Oberflächlich betrachtet erscheint also der Zeitbereichsentwurf im Hinblick auf die Realisierungsfrage günstiger, da er eine direkte Anleitung hierfür liefert. Daß sich dies, im Hinblick auf unvermeidbare Ungenauigkeiten beim Regleraufbau, statt dessen ungünstig auswirkt, zeigen die folgenden Untersuchungen am einläufigen Zustandsregelkreis, der in Bild 7.1 dargestellt ist.

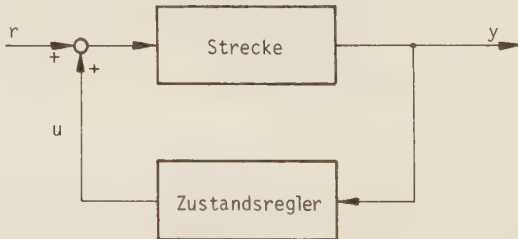


Bild 7.1

Betrachtet werden Zustandsregler ohne I-Anteil für Strecken n-ter Ordnung mit einem Eingang und einem Ausgang. Solche Strecken können durch die Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ y &= \underline{c} \underline{x}\end{aligned}\tag{7.1}$$

oder durch eine Übertragungsfunktion der Form

$$F_S(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}\tag{7.2}$$

beschrieben werden. Die wesentlichen Vorgaben für die Konstruktion eines Zustandsreglers für diese Strecken sind die charakteristischen Polynome

$$\det(sI - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0 \quad (7.3)$$

der geregelten Strecke und

$$\det(sI - \underline{F}) = s^{n-1} + \varphi_{n-2}s^{n-2} + \dots + \varphi_1s + \varphi_0 \quad (7.4)$$

des Beobachters. Aufgrund dieser Vorgaben kann die Übertragungsfunktion des Zustandsreglers als eindeutig bestimmte Lösung eines linearen Gleichungssystems $(2n-1)$ -ter Ordnung im Frequenzbereich berechnet werden (Kapitel 3).

Der Zeitbereichsentwurf des Zustandsreglers ist dagegen nicht eindeutig, weil hier neben dem Übertragungsverhalten des Reglers auch seine innere Struktur festgelegt wird. Dies geschieht anhand der Vorgabe von $(n-1)$ $(n-1)$ Parametern bei der Lösung der Beobachtergleichungen

$$\begin{aligned} \underline{I} \underline{A} - \underline{F} \underline{I} &= \underline{d} \underline{c}^T \\ \underline{e} \underline{I} + \underline{g} \underline{c}^T &= \underline{k}^T \end{aligned} \quad (7.5)$$

und (7.4). Diese Parameter müssen zu einem Zeitpunkt festgelegt werden, wo ihr Einfluß auf die Reglerstruktur nicht unmittelbar zu erkennen ist. Darüber hinaus zeigt sich, daß die Anzahl der möglichen Regler-Realisierungen durch den getrennten Entwurf von Beobachter und Zustandsrückführung eingeschränkt wird. Welche Nachteile dies hat, soll anhand einer Regelstrecke dritter Ordnung demonstriert werden.

Die betrachtete Regelstrecke besitzt die Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ y &= \underline{c}^T \underline{x} \end{aligned} \quad (7.6)$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -14 & -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch einen Zustandsregler sollen die Pole der Strecke von $s_{1/2}^o = -1 \pm 3i$ und $s_3^o = -2$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ verschoben werden. Die Beobachterpole mögen bei $s = -10$ liegen. Da für $m=1$ der Beobachtbarkeitsindex $\nu=n$ beträgt, ist die Beobachterordnung gleich zwei.

Die charakteristischen Polynome der geregelten Strecke und des Beobachters lauten somit

$$\det (s\underline{I}-\underline{A}-\underline{b}\underline{k}^T) = s^3+10s^2+37s+52 \quad (7.7)$$

und

$$\det (s\underline{I}-\underline{F}) = s^2+20s+100 . \quad (7.8)$$

Der Rückführvektor $\underline{k}^T$ ergibt sich als Lösung der Beziehung

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 20-k_1 & 14-k_2 & s+4-k_3 \end{vmatrix} = s^3+10s^2+37s+52$$

zu

$$\underline{k}^T = (-32 \quad -23 \quad -6) \quad (7.9)$$

Da nur eine Ausgangsgröße meßbar ist, muß der Zustand der Strecke beobachtet werden. Der reduzierte Beobachter hierfür genügt den Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{z}} = \underline{F} \underline{z} + \underline{d} y + \underline{T} \underline{b} u .$$

Die Stellgröße wird aus dem Streckenausgang y und dem Beobachterzustand $\underline{z}$ gemäß der Beziehung

$$u = g y + \underline{e}^T \underline{z}$$

gebildet. Beobachter und Zustandsrückführung ergeben zusammen den gesuchten Zustandsregler, dessen Gleichungen in Komponentenschreibweise folgendermaßen lauten:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} u$$

$$u = g y + (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} . \quad (7.10)$$

Bild 7.2 zeigt den Signalflußgraphen des Zustandsreglers zweiter Ordnung nach Gleichung (7.10).

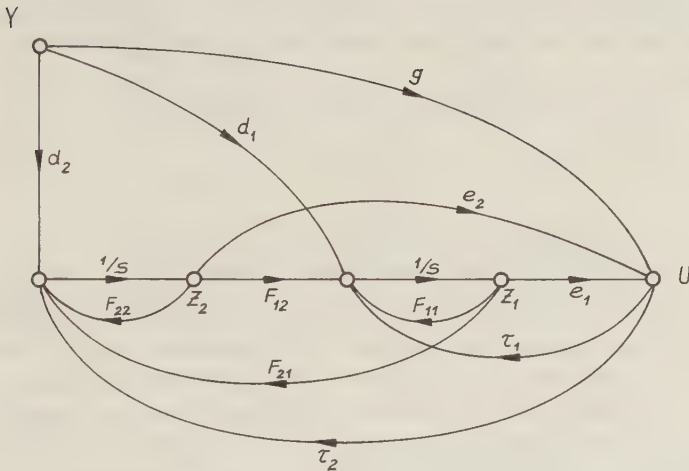


Bild 7.2

Die Vorgabe der $(n-1)(n-1) = 4$ Parameter bei der Lösung der Gleichungen (7.4) und (7.5) bestimmt zwar die innere Struktur des Zustandsreglers, nicht aber dessen Übertragungsverhalten, das durch die gegebenen Streckengleichungen und die gewünschten Pole des geschlossenen Regelkreises festgelegt ist. Damit ist das Verhalten des Regelkreises unabhängig von der Reglerstruktur, wenn die Reglerkoeffizienten exakt eingestellt sind.

Bei praktisch realisierten Zustandsreglern muß aber davon ausgegangen werden, daß die Reglerkoeffizienten fehlerbehaftet sind. Dies kann unterschiedliche Ursachen wie

- beschränkte Genauigkeit der Bauteile (Klassengenauigkeit)
- Temperaturfehler
- Alterung oder
- endliche Wortlänge bei digitalen Reglern

haben. Berücksichtigt man diese Fehler, so hat die innere Struktur des Zustandsreglers einen wesentlichen Einfluß auf sein Verhalten im Regelkreis.

Wie groß dieser Einfluß ist, zeigt die Untersuchung von drei Realisierungen des Zustandsreglers nach Gleichung (7.10), die sich durch unterschiedliche Wahl der Freiheitsgrade beim Zeitbereichsentwurf ergeben.

Realisierung a entsteht durch die Vorgabe

$$\text{von } \underline{F} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

bei der Lösung der Gleichungen (7.5).

Zur Festlegung der Freiheitsgrade bei Realisierung b wurde das in [1] angegebene Entwurfsverfahren für den Beobachter benutzt.

Realisierung c entsteht dadurch, daß ausgehend von den Werten der Realisierung a ein quadratisches Empfindlichkeitsmaß (Kapitel 13) für den Regler in Abhängigkeit der vier vorgebaren Parameter minimiert wurde.

Die Werte der Reglerparameter für die Realisierungen a, b und c sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt.

Die Empfindlichkeit der verschiedenen Realisierungen wird unter der Annahme miteinander verglichen, daß alle Reglerkoeffizienten innerhalb eines gleichprozentigen Toleranzbandes um ihren Nominalwert variieren können. Jeder Zweig im Regler weicht also im Rahmen der Fehlerschranke in positiver oder negativer Richtung von seinem Nominalwert ab. Der "ungünstigste Fall" entspricht derjenigen Fehlerverteilung, bei welcher für eine vorgegebene Fehlerschranke die größte Abweichung vom Nominalverhalten im Regelkreis auftritt. Der kleinste prozentuale Fehler, für den im ungünstigsten Fall der Regelkreis an die Stabilitätsgrenze geraten kann, wird als "kritische Fehlerschranke" bezeichnet.

Diese kritische Fehlerschranke beträgt bei Realisierung a nur 0.1%. Wenn der Zustandsregler in Realisierung a vorliegt, bewirken Fehler von einem Promille in allen Reglerkoeffizienten also nicht nur große Abweichungen vom gewünschten Regelverhalten, sondern sie gefährden im ungünstigsten Falle sogar die Stabilität des Regelkreises.

Unwesentlich bessere Ergebnisse liefert die Realisierung b, mit einer kritischen Fehlerschranke von 0.3%.

Parameter	REALISIERUNGEN				
	a	b	c	d	e
d_2	-363.69	-144.92	384.45	-19.686	-228.97
d_1	959.67	35.308	41.195	-33.535	-116.17
g	-27.513	-27.513	-27.513	-27.513	-27.513
F_{11}	-10.0	30.923	-25.805	-2.0406	0.0
F_{12}	1.0	11.308	1.0527	1.0662	1.0
F_{21}	0.0	-148.10	-237.28	-3.5481	0.0
F_{22}	-10.0	-50.923	5.8051	-1.2390	0.0
τ_1	-52.116	0.0	.21450	-29.288	-26.000
τ_2	21.215	1.0	16.871	-16.229	-53.923
e_2	12.000	-6.000	-.55551	-.060086	0.0
e_1	5.0000	-12.333	15.721	.80904	1.0
Krit. Feh- lerschranke	0.1%	0.3%	2.4%	51%	35%

Tabelle 7.1

Realisierung c, welche das Ergebnis einer systematischen Empfindlichkeitsreduktion darstellt, besitzt eine kritische Fehlerschranke von 2.4%.

In Bild 7.3 sind die Übergangsfunktionen des Zustandsregelkreises für $r(t) = 1(t)$ angegeben, und zwar für die Nominalwerte der Reglerparameter und für eine Fehlerschranke von 0.1% (jeweils ungünstigster Fall) [9].

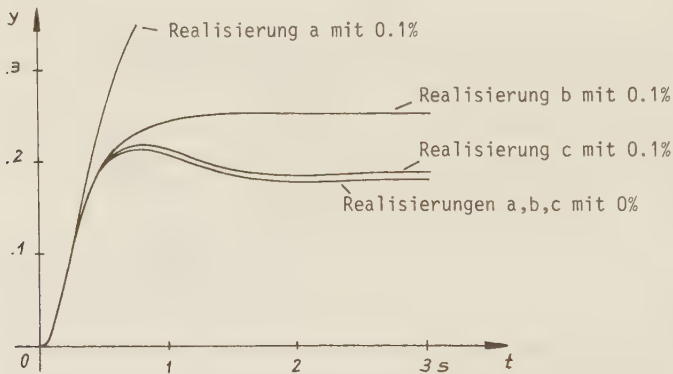


Bild 7.3

Bauteile-Toleranzen und andere Ungenauigkeiten im Regler wirken sich also erheblich auf das Verhalten des Regelkreises aus. Im Hinblick auf industriell übliche Fertigungstoleranzen kann der Einfluß dieser Fehler nicht vernachlässigt werden. Dies gilt umso mehr, als die gefundenen kritischen Fehlerschranken den Prozentsatz angeben, bei dem das ungünstigste Ereignis - nämlich eine Instabilität des Regelkreises - droht. Große Abweichungen vom Nominalverhalten sind aber schon bei wesentlich kleineren Prozentsätzen möglich, so daß die tatsächlich auftretenden Fehler im Regler mindestens eine Größenordnung unterhalb der kritischen Fehlerschranke liegen sollten.

Dies kann nur dann mit vertretbarem Aufwand erreicht werden, wenn die kritische Fehlerschranke genügend groß ist.

Wie die Ergebnisse bei Realisierung c zeigen, läßt sich die Reglerempfindlichkeit durch geschickte Wahl der Regler-Struktur verbessern. Trotzdem ist Realisierung c in zweifacher Hinsicht unbefriedigend.

Zum einen ist die Bestimmung dieser Reglerstruktur mit großem Rechenaufwand verbunden und zum anderen ist die erzielte kritische Fehler-schranke von 2.4% immer noch relativ niedrig.

Wesentlich bessere Ergebnisse lassen sich dagegen beim Frequenzbereichsentwurf des Reglers erreichen. Bei der betrachteten Strecke besteht hier der Rechenaufwand zum Entwurf des Zustandsreglers lediglich in der Lösung eines linearen Gleichungssystems fünfter Ordnung, der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 18 & 6 & 0 \\ 20 & 14 & 0 & 18 & 6 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -1_2 \\ -1_1 \\ -1_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \\ 37 & 10 \\ 52 & 37 \\ 0 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10-4 \\ 37-14 \\ 52-20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Als Ergebnis erhält man die Übertragungsfunktion des Zustandsreglers zu

$$\begin{aligned} F_R(s) &= \frac{1_2 s^2 + 1_1 s + 1_0}{s^2 + p_1 s + p_0} \\ &= \frac{-\frac{1073}{39} s^2 - \frac{4531}{39} s - \frac{8930}{39}}{s^2 + 26s + \frac{701}{13}} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die im Zeitbereich entworfenen Realisierungen a, b und c besitzen zwar dieselbe Übertragungsfunktion $F_R(s)$, jedoch sind die Möglichkeiten für die Realisierung dieser Übertragungsfunktion dadurch eingeschränkt, daß die Eigenwerte der Matrix $\underline{F}$ mit den Beobachtbareigenwerten übereinstimmen müssen. Dies bedeutet konkret, daß bei der Realisierung der Übertragungsfunktion (7.12) in der Form des Graphen nach Bild 7.2 die Nebenbedingung

$$\begin{vmatrix} s - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & s - F_{22} \end{vmatrix} = s^2 + 20s + 100 \quad (7.13)$$

erfüllt werden muß.

Beim Reglerentwurf im Frequenzbereich existiert diese Beschränkung nicht, so daß sich gegenüber dem Zeitbereichsentwurf (n-1) zusätzliche Freiheitsgrade ergeben, die zur Verringerung der Regler-Empfindlichkeit verwendet werden können.

Beim untersuchten Zustandsregler stehen also für eine systematische Verringerung der Reglerempfindlichkeit zwei weitere Freiheitsgrade gegenüber dem Zeitbereichsentwurf zur Verfügung. Dies gestattet die Konstruktion eines Zustandsreglers mit einer kritischen Fehlerschranke, die weit über derjenigen von Realisierung c liegt.

Benutzt man die zusätzlichen zwei Freiheitsgrade beim betrachteten Regler zu einer systematischen Verringerung der Reglerempfindlichkeit (siehe Kapitel 13), so erhält man Realisierung d. Die kritische Fehlerschranke dieser Realisierung, deren Verstärkungsfaktoren in Tabelle 7.1 angegeben sind, beträgt 51%. Durch den Wegfall der Nebenbedingung (7.13) beim Frequenzbereichsentwurf ist also eine starke Verringerung der Reglerempfindlichkeit möglich.

Für die Minimalrealisierung einer vorgegebenen Übertragungsfunktion existieren eine Reihe von Normalformen, die für die Realisierung der im Frequenzbereich erhaltenen Reglerübertragungsfunktion verwendet werden können. Unter diesen Normalformen zeichnet sich die sogenannte "Beobachternormalform" [2] dadurch aus, daß in ihr die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion direkt als Zweigverstärkungen auftreten. Bild 7.4 zeigt die Realisierung des untersuchten Zustandsreglers in Beobachternormalform (Realisierung e).

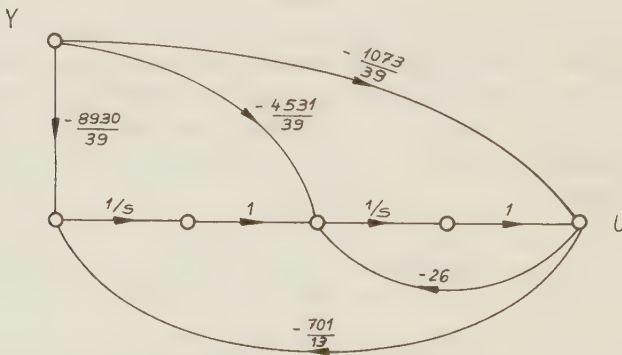


Bild 7.4

Diese Realisierung e besitzt eine kritische Fehlerschranke von 35%. Sie ist damit etwas empfindlicher als Realisierung d, jedoch weitaus unempfindlicher als die optimierte Realisierung c aus dem Zeitbereichsentwurf.

Die Realisierung eines Zustandsreglers besitzt also einen entscheidenden Einfluß auf das Verhalten des Regelkreises, wenn Fehler im Regler auftreten. Bei digitalen Reglern großer Wortlänge sind die Fehler in den Koeffizienten so klein, daß ihre Auswirkung auf das Regelergebnis auch bei empfindlichen Reglerstrukturen vernachlässigt werden kann. Beim Aufbau digitaler Regler mit Hilfe von Mikroprozessoren ist man jedoch an einer Reduzierung der Wortlänge interessiert, so daß hier Aspekte der Reglerempfindlichkeit eine Rolle spielen. Je kleiner die Empfindlichkeit des Reglers gegenüber Fehlern in seinen Parametern ist, desto geringer ist die Wortlänge, die zur Einhaltung einer vorgegebenen Toleranzschranke für das Reglerverhalten benötigt wird.

Bei analogen Reglern kann der Einfluß von Bauteile-Toleranzen auf keinen Fall vernachlässigt werden. Der Aufbau des betrachteten Zustandsreglers mit nicht speziell ausgesuchten Bauelementen würde bei einer Verwendung der Realisierung a oder b auf keinen funktionsfähigen Regler führen. Der Versuch, durch Verwendung hochgenauer Bauelemente eine funktionsfähige Realisierung a des Zustandsreglers zu erstellen, wäre nicht nur kostspielig, sondern auch unnötig, da es durch geschickte Wahl der Reglerstruktur gelingt, die kritische Fehlerschranke des Reglers um mehr als zwei Größenordnungen zu erhöhen und damit die Genauigkeitsanforderungen an die Bauelemente entsprechend zu verringern.

Die Reduzierung der Empfindlichkeit wirkt sich somit unmittelbar auf die Herstellungskosten des Reglers aus. Zum anderen ist ein unempfindlicher Regler robuster gegenüber Veränderungen, die während des Betriebes, z.B. durch Temperaturschwankungen, hervorgerufen werden.

Es ist also sinnvoll und notwendig, den Einfluß von Fehlern im Regler genauer zu untersuchen. Dies geschieht in den folgenden Kapiteln mit dem Ziel, solche Reglerstrukturen zu finden, bei denen der Einfluß dieser Fehler möglichst gering ist.

8 EINLEITENDE BEMERKUNGEN ZU DEN EMPFINDLICHKEITSUNTERSUCHUNGEN

Am Beginn von Empfindlichkeitsuntersuchungen müssen drei wesentliche Fragen beantwortet werden, nämlich

- 1.) welches System
- 2.) der Einfluß welcher Parameter und
- 3.) die Auswirkung auf welche Systemkenngrößen

werden betrachtet?

Den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen bilden zunächst Zustandsregler ohne I-Anteil für Strecken mit einem Eingang und einem Ausgang, deren Übertragungsfunktion im Frequenzbereich berechnet wurde. Für die Realisierung dieser Übertragungsfunktion in einem Netzwerk minimaler Ordnung gibt es eine Reihe von Freiheitsgraden, welche zur Verringerung der Regler-Empfindlichkeit benutzt werden können. Wie in Kapitel 7 gezeigt wurde, unterliegen die über den Zeitbereichsentwurf entstehenden Regler-Realisierungen gewissen Beschränkungen, so daß es nicht sinnvoll ist, bei der Suche nach günstigen Regler-Realisierungen den Zeitbereichsentwurf zugrunde zu legen. Die Untersuchungen der Reglerempfindlichkeit werden am isolierten Regler durchgeführt, jedoch geschieht dies im Hinblick auf seinen späteren Einsatz im geschlossenen Regelkreis.

Das Verhalten des Reglers oder des Regelkreises kann durch verschiedene Größen gekennzeichnet werden, wie z.B. die Übertragungsfunktion, den Frequenzgang, die Lage der Eigenwerte oder die Übergangsfunktion nach einem Eingangssprung. Die üblichen Beschreibungsformen des Zustandsreglers sind seine Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\underline{z}} &= \underline{\tilde{F}} \underline{z} + \underline{\tilde{d}} y \\ u &= \underline{\tilde{e}}^T \underline{z} + g y\end{aligned}\tag{8.1}$$

oder seine Übertragungsfunktion $F_R(s, \underline{\alpha})$, wobei in $\underline{\alpha}$ alle Reglerparameter zusammengefaßt seien.

Im folgenden wird untersucht, welche Auswirkungen Fehler im Regler selbst haben. Dabei wird angenommen, daß jeder Zweig im Regler mit einem gleichprozentigen Fehler behaftet sein kann (Klassengenauigkeit der Bauelemente).

In einem Zustandsregler zweiter Ordnung, der in der allgemeinen Form nach Bild 8.1 realisiert ist, existieren also 13 fehlerbehaftete Zweige.

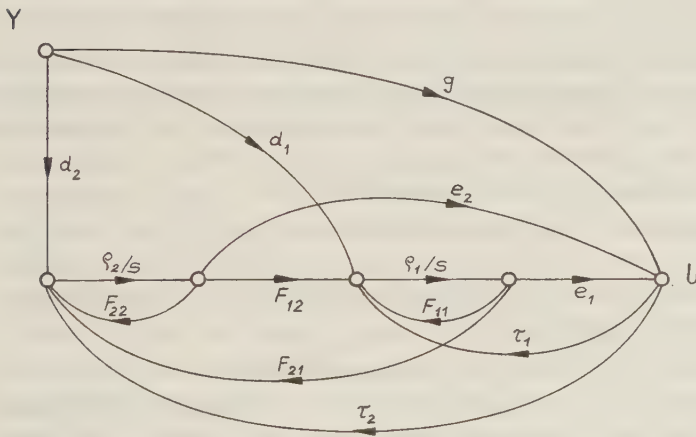


Bild 8.1

Die Fehler in den Integratoren werden dabei ebenfalls durch einen Fehler in den Zweigverstärkungen φ_i berücksichtigt ($\varphi_1 = \varphi_2 = 1$).

Die klassische Definition der Empfindlichkeit $\tilde{S}_{\alpha_i}^F$ einer Übertragungsfunktion $F_R(s, \alpha)$ bezüglich eines Parameters α_i stammt von BODE [3].

Die Empfindlichkeit

$$\tilde{S}_{\alpha_i}^F = \frac{\partial F_R / F_R}{\partial \alpha_i / \alpha_i} \quad (8.2)$$

(von BODE zunächst reziprok definiert) beschreibt den Einfluß der relativen differentiellen Änderung des Parameters α_i auf die relative

differentielle Änderung der Übertragungsfunktion $F_R(s, \alpha)$. Die Größe $\tilde{S}_{\alpha_i}^F$ wird auch als "vollrelative Empfindlichkeit" bezeichnet. Sie besitzt gewisse Nachteile, welche in [11] diskutiert werden.

Eine andere Größe zur Kennzeichnung der Empfindlichkeit ist die sogenannte "halbrelative Empfindlichkeit"

$$S_{\alpha_i}^F = \frac{\partial F_R}{\partial \alpha_i} \alpha_i \quad (8.3)$$

Sie beschreibt den Einfluß einer relativen differentiellen Änderung des Parameters α_i auf die Übertragungsfunktion $F_R(s, \alpha)$. Die Größen $\tilde{S}_{\alpha_i}^F$ und $S_{\alpha_i}^F$ sind in der Regel Funktionen der komplexen Veränderlichen s .

Bei der Untersuchung des Einflusses von Parameteränderungen auf die Lage der Eigenwerte spricht man von der sogenannten Eigenwertempfindlichkeit [18], [23], [5]. Auf den Zustandsregler nach Gleichung (8.1) angewandt bedeutet dies die Untersuchung des Einflusses fehlerhafter Parameter auf die Eigenwerte der Matrix $\tilde{F}$.

Untersuchungen der Eigenwertempfindlichkeit führen bei Filtern auf interessante Aussagen über den Zusammenhang zwischen Parameterungenauigkeiten und dem Stabilitätsverhalten der Filter in Abhängigkeit von der Filterstruktur [18].

Aussagen über die Eigenwertempfindlichkeit des isolierten Reglers, wie sie z.B. in [23] getroffen werden, sind jedoch nicht ohne weiteres auf den geschlossenen Regelkreis zu übertragen. Fehler in den Größen $\tilde{d}, \tilde{e}^T$ und g des Reglers nach Gleichung (8.1) beeinflussen die Eigenwerte von $\tilde{F}$ überhaupt nicht, sie gehen jedoch in die Eigenwert-Veränderung des geschlossenen Regelkreises ein. Aus diesem Grund sind Filter-Realisierungen mit günstigen Empfindlichkeitseigenschaften gegenüber Parameterschwankungen im Filter nicht unbedingt auch günstige Regler-Realisierungen im Hinblick auf eine geringe Auswirkung von Fehlern im Regler auf den Regelkreis.

Aus der Vielzahl der Kriterien für die Beurteilung der Empfindlichkeit muß ein passendes ausgewählt werden, das eine sinnvolle Klassifikation von Zustandsreglern erlaubt.

Zustandsregler werden so konzipiert, daß die geregelte Strecke ein gewünschtes Verhalten besitzt. Fehler im Zustandsregler bewirken eine Ab-

weichung von diesem Nominalverhalten. Wie groß diese Abweichung maximal sein darf und ob man sie im Zeit- oder im Frequenzbereich definiert, hängt vom jeweiligen Anwendungsfall ab. Eine Minimalforderung muß jedoch jeder Regler erfüllen, und zwar die Forderung nach der Stabilität des Regelkreises. Es erscheint daher sinnvoll, verschiedene Realisierungen eines Zustandsreglers danach zu beurteilen, wie groß die Fehler in ihren Koeffizienten sein können, ohne daß eine Instabilität des Regelkreises resultiert.

Der größte prozentuale Fehler, für den diese Bedingung noch erfüllt ist, wird als kritische Fehlerschranke bezeichnet (siehe Kapitel 7).

Die Regler-Kenngröße, anhand welcher die Empfindlichkeitsuntersuchungen durchgeführt werden, muß also von allen Reglerparametern abhängen, die auch das Stabilitätsverhalten des Regelkreises beeinflussen. Eine dieser Größen ist die Übergangsfunktion $u(t)$ des Zustandsreglers nach einem Eingangssprung $y(t)=1(t)$. Die Veränderung eines Parameters α_i um $\kappa\%$ führt zu einer veränderten Übergangsfunktion $u_{\alpha_i}(t)$. Die Differenz

$$\Delta u_{\alpha_i}(t) = u_{\alpha_i}(t) - u(t) \quad (8.4)$$

zwischen gestörter und ungestörter Übergangsfunktion kann als "Zusatzbewegung" [13] des Zustandsreglers aufgrund der Veränderung von α_i bezeichnet werden.

Bild 8.2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Größen $u(t)$, $u_{\alpha_i}(t)$ und $\Delta u_{\alpha_i}(t)$.

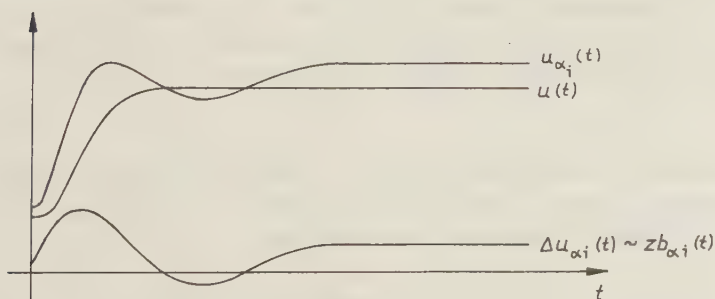


Bild 8.2

Für kleine prozentuale Abweichungen der Parameter α_i von ihrem Nominalwert gilt für die Zusatzbewegung näherungsweise die Bezeichnung

$$\Delta u_{\alpha_i}(t) \approx \frac{\kappa}{100} \frac{\partial u(t)}{\partial \alpha_i} \alpha_i \quad (8.5)$$

Es werden nur gleichprozentige Abweichungen in den α_i betrachtet, und deshalb kann der Ausdruck (8.6) auf $\kappa/100$ normiert werden. Dadurch ergibt sich die Zusatzbewegung $z b_{\alpha_i}(t)$ des Reglers bei relativen differentiellen Änderungen von α_i zu

$$z b_{\alpha_i}(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial \alpha_i} \alpha_i \quad (8.6)$$

Da zwischen der Übergangsfunktion und der Übertragungsfunktion des Reglers im LAPLACE-Bereich die Beziehung

$$U(s) = \frac{1}{s} F_R(s, \alpha) \quad (8.7)$$

besteht, lautet die Beziehung (8.6) für die Zusatzbewegung im LAPLACE-Bereich

$$ZB_{\alpha_i}(s) = \frac{1}{s} \cdot S_{\alpha_i}^F, \quad (8.8)$$

mit der halbrelativen Empfindlichkeit $S_{\alpha_i}^F$ nach Gleichung (8.3). Die halbrerelative Empfindlichkeit $S_{\alpha_i}^F$ kann somit als Übertragungsfunktion für die Zusatzbewegung bei relativen differentiellen Änderungen von α_i interpretiert werden. Die Empfindlichkeit des Reglers gegenüber einem Parameter α_i ist also umso geringer je kleiner die Zusatzbewegung $z b_{\alpha_i}(t)$ ist.

Der Endwert der Zusatzbewegung $z b_{\alpha_i}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ ist ein Maß für den Einfluß des Parameters α_i auf den statischen Übertragungsfaktor des Reglers. Es ist deshalb möglich, die "statische Empfindlichkeit" $E_{\alpha_i}^F$ des Zustandsreglers gegenüber relativen differentiellen Änderungen des Parameters α_i in der Form

$$E_{\alpha_i}^F = \lim_{s \rightarrow 0} S_{\alpha_i}^F \quad (8.9)$$

†) einzuführen. Im Gegensatz zu den voll- und halbrelativen Empfindlichkeiten $\tilde{S}_{\alpha_i}^F$ und $S_{\alpha_i}^F$ ist $E_{\alpha_i}^F$ keine Funktion von s , sondern ein reiner Zahlenwert unterschiedlichen Vorzeichens.

†) Die Interpretation von $E_{\alpha_i}^F$ als Änderung des statischen Endwertes setzt stabile Regler voraus. Die Definition (8.9) gilt jedoch auch für instabile Regler.

Der Einfluß aller q Parameter α_i im Zustandsregler kann über die sogenannte Summenempfindlichkeit berücksichtigt werden, die sich als Summe der Einzelempfindlichkeiten ergibt. Die Schwierigkeit, daß sich bei der Summation der $E_{\alpha_i}^F$ positive und negative Anteile gegenseitig aufheben, kann durch eine Betragsbildung umgangen werden. Die "statische Summenempfindlichkeit" SE^F des Zustandsreglers ergibt sich damit zu

$$SE^F = \sum_{i=1}^q |E_{\alpha_i}^F| \quad . \quad . \quad . \quad (8.10)$$

Obwohl bei der statischen Empfindlichkeit die gesamte Dynamik der Zustatzbewegung vernachlässigt wird, zeigt sich, daß sie ein brauchbares Mittel zur Klassifikation von Regler-Realisierungen im Hinblick auf die kritische Fehlerschranke im Regelkreis darstellt.

9 DIE STATISCHE SUMMENEMPFINDLICHKEIT VERSCHIEDENER REGLER-NORMALFORMEN

Für die Minimalrealisierung einer vorgegebenen Übertragungsfunktion existiert eine Reihe von Normalformen, die auch als kanonische Realisierungen bezeichnet werden. Sie besitzen eine einfache Struktur und lassen sich deshalb leicht aus der Übertragungsfunktion herleiten.

Im folgenden werden fünf verschiedene Normalformen für Zustandsregler untersucht, deren Bezeichnung sich an die in [2] anlehnt. Es sind dies

- 1.) die Beobachternormalform
- 2.) die Regelungsnormalform
- 3.) die Steuerbarkeitsnormalform
- 4.) die Beobachtbarkeitsnormalform und
- 5.) die Diagonalform, bei der reelle Regler-Eigenwerte vorausgesetzt sind.

In Bild 9.1 sind die fünf betrachteten Realisierungen für die Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^2 + p_1 s + p_0} \quad (9.1)$$

angegeben.

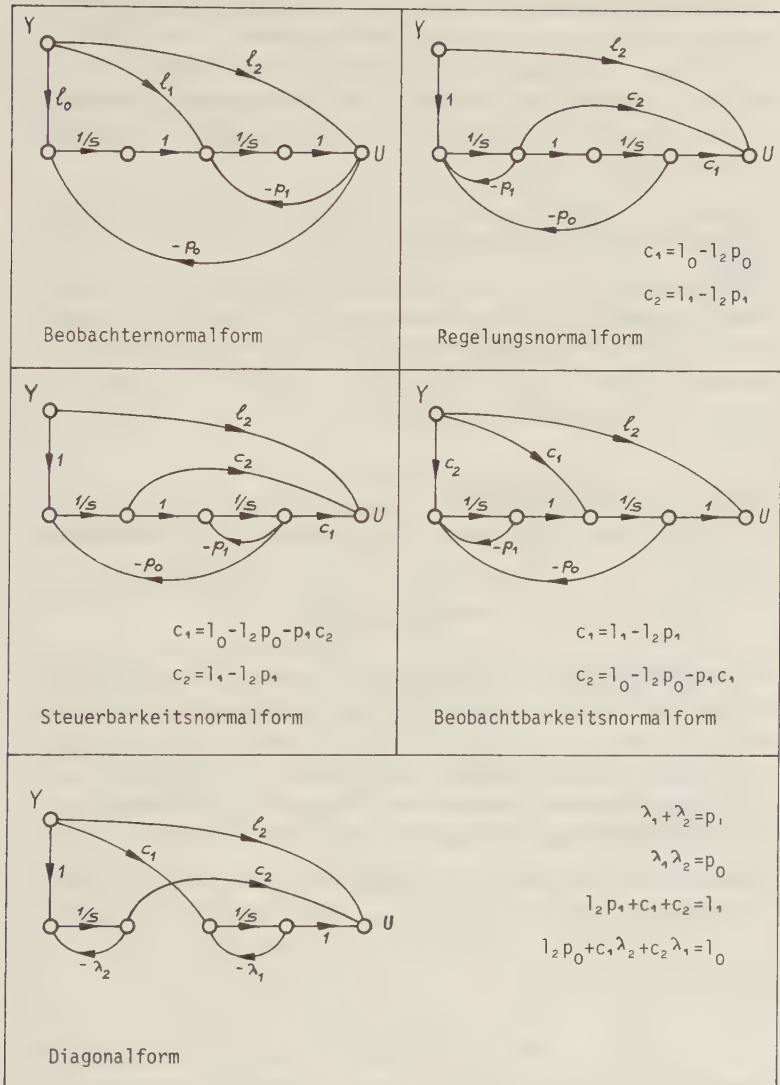


Bild 9.1

Die statische Summenempfindlichkeit der Normalformen 1 bis 4 läßt sich für beliebige Reglerordnungen angeben, wodurch eine einfache Klassifikation der Normalformen im Hinblick auf ihr Stabilitätsverhalten im Regelkreis bei fehlerhaften Regler-Koeffizienten möglich wird. Für die Diagonalform werden allgemeine Aussagen bis zu Reglern dritter Ordnung gemacht.

Die statische Summenempfindlichkeit wird unter der Annahme berechnet, daß alle Reglerkoeffizienten fehlerhaft sind.

Da das konstante Glied in der Reglerübertragungsfunktion nicht von s abhängt, gehen die Integratorverstärkungen Q_i nicht in die Ausdrücke für die statischen Empfindlichkeiten des Reglers ein. Dadurch braucht die Variation der Integratorzweige bei den Herleitungen in Kapitel 9 nicht berücksichtigt zu werden.

9.1 DIE BEOBACHTERNORMALFORM

Betrachtet werden Zustandsregler n -ter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_n s^n + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0} \quad (9.2)$$

Die Zweigverstärkungen der Realisierungen werden zur Unterscheidung von den Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion mit Großbuchstaben bezeichnet. Bei den untersuchten Normalformen besitzt eine Reihe von Zweigverstärkungen den Wert eins. Trotzdem werden auch für sie allgemeine Faktoren eingeführt, um ihren Einfluß auf die Reglerempfindlichkeit bestimmen zu können.

Die Realisierung der Übertragungsfunktion (9.2) in Beobachternormalform zeigt Bild 9.2.

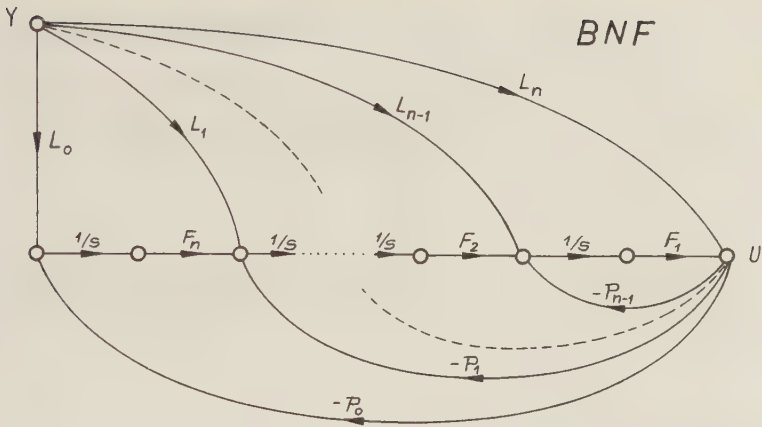


Bild 9.2

Die Übertragungsfunktion der in Bild 9.2 gezeigten Beobachternormalform lautet

$$\text{BNF}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} L_i s^i \prod_{j=1}^{n-i} F_j + L_n s^n}{\sum_{i=0}^{n-1} P_i s^i \prod_{j=1}^{n-i} F_j + s^n} \quad (9.3)$$

Setzt man die Größen $F_j=1$, $j=1,2,\dots,n$, so ergeben sich die Verstärkungsfaktoren P_i und L_i der Regler-Realisierung nach Bild 9.2 zu

$$\begin{aligned} L_i &= l_i, & i &= 0,1,\dots,n \\ \text{und} \quad P_j &= p_j, & j &= 0,1,\dots,n-1 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Die Zweigverstärkungen in der Beobachternormalform des Zustandsreglers entsprechen also gerade den Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion.

Die statische Empfindlichkeit $E_{\alpha i}^F$ einer Übertragungsfunktion $F_R(s, \underline{\alpha})$ ergibt sich laut Gleichung (8.9) und (8.3) zu

$$E_{\alpha i}^F = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial F_R(s, \underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \alpha_i, \quad (9.5)$$

oder, da Regler mit I-Anteil ausgeschlossen sind,

$$E_{\alpha i}^F = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\lim_{s \rightarrow 0} F(s, \underline{\alpha}) \right] \alpha_i. \quad (9.6)$$

Für die Übertragungsfunktion BNF(s) nach Gleichung (9.3) gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \text{BNF}(s) = \frac{L_0}{P_0}, \quad (9.7)$$

und folglich lauten die statischen Empfindlichkeiten $E_{\alpha i}^{\text{BNF}}$ der Beobachternormalform

$$E_{L_0}^{\text{BNF}} = \frac{L_0}{P_0} \quad \text{und} \quad E_{P_0}^{\text{BNF}} = \frac{-L_0}{P_0}.$$

Die über Gleichung (8.10) definierte statische Summenempfindlichkeit des in Beobachternormalform realisierten Zustandsreglers n-ter Ordnung hat damit die Form

$$\text{SE}^{\text{BNF}} = 2 \frac{|L_0|}{|P_0|},$$

oder, wegen der Beziehungen (9.4),

$$\text{SE}^{\text{BNF}} = 2 \frac{|1_0|}{|P_0|}. \quad (9.8)$$

Die statische Summenempfindlichkeit eines Zustandsreglers, der in Beobachternormalform realisiert ist, ergibt sich also unabhängig von der Reglerordnung aus dem doppelten Betrag der Reglerübertragungsfunktion für $s=0$.

9.2 DIE REGELUNGSNORMALFORM

Die Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_n s^n + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

in Regulationsnormalform hat die in Bild 9.3 gezeigte Gestalt.

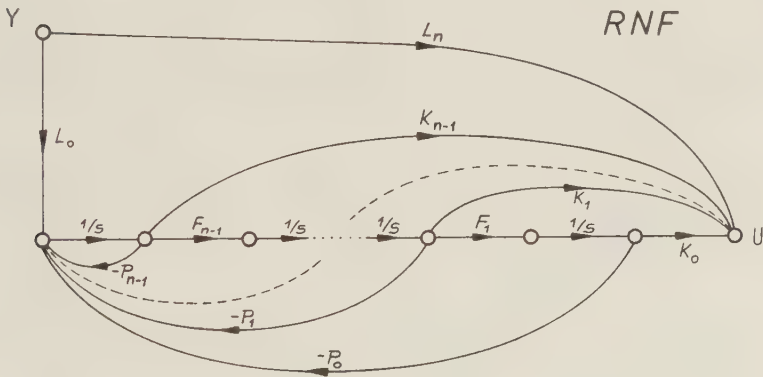


Bild 9.3

Die Übertragungsfunktion der Realisierung nach Bild 9.3 lautet

$$\begin{aligned} \text{RNF}(s) &= \frac{U(s)}{Y(s)} = \\ &= \frac{L_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} P_i s^i \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j + P_{n-1} s^{n-1} + s^n \right\} + L_0 \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} K_i s^i \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j + K_{n-1} s^{n-1} \right\}}{\sum_{i=0}^{n-2} P_i s^i \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j + P_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (9.9) \end{aligned}$$

Mit $L_0 = 1$ und $F_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ ergeben sich die Zweigverstärkungen L_i und P_i der Regulationsnormalform zu

$$\begin{aligned} P_i &= p_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1 \\ L_n &= l_n \end{aligned} \quad (9.10)$$

und $K_i = l_i - l_n p_i$, $i=0, 1, \dots, n-1$.

Mit dem Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0} \text{RNF}(s) = \frac{L_n p_0 + L_0 K_0}{p_0} \quad (9.11)$$

lauten die statischen Empfindlichkeiten $E_{\alpha i}^{\text{RNF}}$ nach Gleichung (9.6)

$$E_{L_n}^{\text{RNF}} = L_n \quad ; \quad E_{L_0}^{\text{RNF}} = \frac{L_0 K_0}{p_0}$$

$$E_{K_0}^{\text{RNF}} = \frac{K_0 L_0}{p_0} \quad \text{und} \quad E_{p_0}^{\text{RNF}} = - \frac{L_0 K_0}{p_0}$$

Die statische Summenempfindlichkeit des in Regelungsnormalform realisierten Zustandsreglers n-ter Ordnung besitzt damit die Gestalt

$$\text{SE}^{\text{RNF}} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |L_n p_0| + 3 |L_0 K_0| \right\} ,$$

oder, ausgedrückt durch die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion

$$\text{SE}^{\text{RNF}} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_n p_0| + 3 |l_0 - l_n p_0| \right\} \quad (9.12)$$

Die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform läßt sich also ebenfalls auf einfache Weise für beliebige Reglerordnungen aus den Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion berechnen.

Vergleicht man die Ausdrücke (9.8)

$$\text{SE}^{\text{BNF}} = 2 \frac{|l_0|}{|p_0|}$$

und (9.12) für die statische Summenempfindlichkeit der Beobachter- und der Regelungsnormalform miteinander, so läßt sich leicht überprüfen, daß die Beziehung

$$\text{SE}^{\text{RNF}} \leq \text{SE}^{\text{BNF}}$$

nur dann gilt, wenn die Koeffizienten l_n , l_0 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion $F_R(s)$ die Bedingung

$$0.5 \leq \frac{l_n p_0}{l_0} \leq 1.25 \quad (9.13)$$

erfüllen. Für alle Werte von l_n , l_0 und p_0 außerhalb dieses Bereiches besitzt folglich die Beobachternormalform eine kleinere statische Summenempfindlichkeit als die Regelungsnormalform.

9.3 DIE STEUERBARKEITSNORMALFORM

Die Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_n s^n + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

in Steuerbarkeitsnormalform besitzt die in Bild 9.4 gezeigte Gestalt.

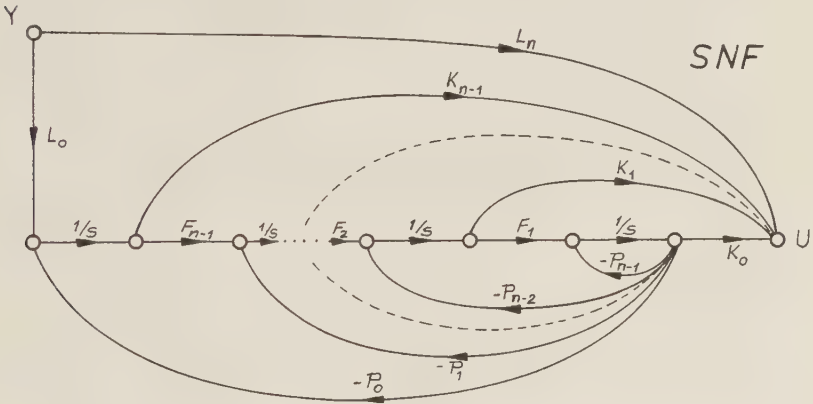


Bild 9.4

Unter Berücksichtigung der Vereinbarungen

$$\left. \begin{aligned} \prod_{j=i}^k \alpha_j &\equiv 1 \quad \text{für } k < i \\ \text{und} \quad \sum_{j=i}^k \alpha_j &\equiv 0 \quad \text{für } k < i \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

läßt sich die Übertragungsfunktion der Realisierung nach Bild 9.4 wie folgt angeben:

$$SNF(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \quad (9.15)$$

$$= \frac{L_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i \prod_{j=1}^{n-1-i} F_j + s^n \right\} + L_0 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [K_i s^{i-n} \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j \left(\sum_{k=n-i}^{n-1} p_k s^k \prod_{\ell=1}^{n-k-1} F_\ell + s^n \right)] \right\}}{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i \prod_{j=1}^{n-1-i} F_j + s^n}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ \text{und } F_j &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (9.16)$$

so lassen sich die Zweigverstärkungen der Steuerbarkeitsnormalform in Abhängigkeit der Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} P_i &= p_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ L_n &= l_n \quad \text{und} \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$L_n P_m \prod_{j=1}^{n-m-1} F_j + L_0 \left[K_m \prod_{j=m+1}^{n-1} F_j + \sum_{i=m+1}^{n-1} K_i P_{n-m-i} \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{i-m-1} F_\ell \right] = \ell_m, \quad m=0, 1, \dots, n-1$$

ermitteln.

Der Grenzwert der Übertragungsfunktion SNF(s) für $s \rightarrow 0$ lautet

$$\lim_{s \rightarrow 0} \text{SNF}(s) = \frac{L_n P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j + L_0 \left[K_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j + \sum_{i=1}^{n-1} K_i P_{n-i} \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{i-1} F_\ell \right]}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j}. \quad (9.18)$$

Daraus ergeben sich die statischen Empfindlichkeiten der Steuerbarkeitsnormalform über Gleichung (9.6) zu

$$\begin{aligned} E_{L_n}^{\text{SNF}} &= L_n \\ E_{L_0}^{\text{SNF}} &= \frac{L_0 \left[K_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j + \sum_{i=1}^{n-1} K_i P_{n-i} \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{i-1} F_\ell \right]}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j} \\ F_{P_0}^{\text{SNF}} &= \frac{L_n P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j - \left\{ L_n P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j + L_0 \left[K_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j + \sum_{i=1}^{n-1} K_i P_{n-i} \prod_{j=i+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{i-1} F_\ell \right] \right\}}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j} \\ E_{P_m}^{\text{SNF}} &= \frac{L_0 \left[K_{n-m} P_m \prod_{j=n-m+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{n-m-1} F_\ell \right]}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j}, \quad m=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$E_{K_0}^{SNF} = \frac{L_0 K_0}{P_0}$$

$$E_{K_m}^{SNF} = \frac{L_0 K_m P_{n-m} \prod_{j=m+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{m-1} F_\ell}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j}, \quad m=1,2,\dots,n-1$$

$$E_{F_m}^{SNF} = \frac{-L_0 K_m P_{n-m} \prod_{j=m+1}^{n-1} F_j \prod_{\ell=1}^{m-1} F_\ell}{P_0 \prod_{j=1}^{n-1} F_j}, \quad m=1,2,\dots,n-1.$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (9.16) und (9.17) für die Zweigverstärkungen, so lassen sich die obigen Ausdrücke für die statischen Empfindlichkeiten vereinfachen und man erhält:

$$E_{L_n}^{SNF} = \frac{l_n P_0}{P_0}, \quad E_{L_0}^{SNF} = \frac{l_0 - l_n P_0}{P_0}$$

$$E_{P_0}^{SNF} = \frac{l_n P_0 - l_0}{P_0}, \quad E_{K_0}^{SNF} = \frac{K_0}{P_0}$$

$$E_{P_m}^{SNF} = \frac{K_{n-m} P_m}{P_0}, \quad m = 1,2,\dots,n-1$$

$$E_{K_m}^{SNF} = \frac{K_m P_{n-m}}{P_0}, \quad m = 1,2,\dots,n-1$$

$$E_{F_m}^{SNF} = \frac{-K_m P_{n-m}}{P_0}, \quad m = 1,2,\dots,n-1.$$

Damit ergibt sich schließlich die statische Summenempfindlichkeit der Steuerbarkeitsnormalform zu

$$SE^{SNF} = \frac{1}{|P_0|} \left\{ |l_n P_0| + 2 |l_0 - l_n P_0| + |K_0| + \sum_{m=1}^{n-1} |K_{n-m} P_m| + 2 \sum_{m=1}^{n-1} |K_m P_{n-m}| \right\}. \quad (9.19)$$

Die Größe der statischen Summenempfindlichkeit eines Zustandsreglers in Steuerbarkeitsnormalform hängt also im Gegensatz zur Beobachter- und Regelungsnormform von der Ordnung des Reglers ab.

9.4 DIE BEOBACHTBARKEITSNORMALFORM

Die Realisierung einer Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_n s^n + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

in Beobachtbarkeitsnormalform besitzt die im Bild 9.5 gezeigte Gestalt.

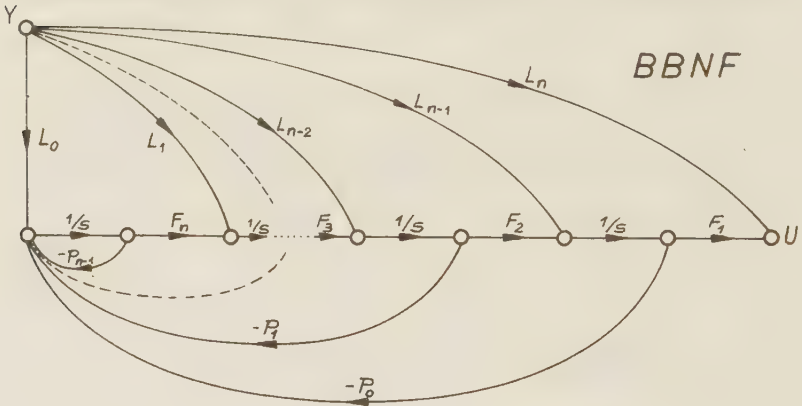


Bild 9.5

Berücksichtigt man wiederum die Vereinbarungen (9.14), so läßt sich die Übertragungsfunktion der Realisierung nach Bild 9.5 wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \text{BBNF}(s) &= \frac{U(s)}{Y(s)} = \\ &= \frac{L_n \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} P_\ell s^\ell \prod_{j=\ell+2}^n F_j + s^n \right] + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\{ L_\ell s^{\ell-n} \prod_{j=1}^{n-\ell} F_j \left[\sum_{k=n-\ell}^{n-1} P_k s^k \prod_{\ell+2}^n F_\ell + s^n \right] \right\}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} P_\ell s^\ell \prod_{j=\ell+2}^n F_j + s^n} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Setzt man

$$F_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.21)$$

so können die Zweigverstärkungen L_i und P_i der Beobachtbarkeitsnormalform aus den Beziehungen

$$L_n = 1_n$$

$$P_i = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (9.22)$$

und

$$L_n P_m \prod_{j=2}^n F_j + L_m \prod_{j=1}^{n-m} F_j + \sum_{i=m+1}^{n-1} [L_i P_{n-i} \prod_{j=1}^{n-i} F_j \prod_{\ell=n-i+2}^n F_\ell] = \ell_m, \quad m=0, 1, \dots, n-1$$

ermittelt werden.

Der Grenzwert der Übertragungsfunktion BBNF(s) für $s \rightarrow 0$ lautet

$$\lim_{s \rightarrow 0} \text{BBNF}(s) = \frac{L_n P_0 \prod_{j=2}^n F_j + L_0 \prod_{j=1}^n F_j + \sum_{i=1}^{n-1} [L_i P_{n-i} \prod_{j=1}^{n-i} F_j \prod_{\ell=n-i+2}^n F_\ell]}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j} \quad (9.23)$$

Ober Gleichung (9.6) ergeben sich daraus die statischen Empfindlichkeiten der Beobachtbarkeitsnormalform zu

$$E_{L_n}^{\text{BBNF}} = L_n$$

$$E_{L_0}^{\text{BBNF}} = \frac{L_0 F_1}{P_0}$$

$$E_{L_m}^{\text{BBNF}} = \frac{L_m P_{n-m} \prod_{j=1}^{n-m} F_j \prod_{\ell=n-m+2}^n F_\ell}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$E_{P_0}^{\text{BBNF}} = \frac{L_n P_0 \prod_{j=2}^n F_j - \{L_n P_0 \prod_{j=2}^n F_j + L_0 \prod_{j=1}^n F_j + \sum_{i=1}^{n-1} [L_i P_{n-i} \prod_{j=1}^{n-i} F_j \prod_{\ell=n-i+2}^n F_\ell]\}}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j}$$

$$E_{P_m}^{\text{BBNF}} = \frac{L_{n-m} P_m \prod_{j=1}^m F_j \prod_{\ell=m+2}^n F_\ell}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$E_{F_1}^{\text{BBNF}} = \frac{L_0 \prod_{j=1}^n F_j + \sum_{i=1}^{n-1} [L_i P_{n-i} \prod_{j=1}^{n-i} F_j \prod_{\ell=n-i+2}^n F_\ell]}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j}$$

$$E_{F_m}^{\text{BBNF}} = \frac{-L_{n-m+1} P_{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} F_j \prod_{\ell=m+1}^n F_\ell}{P_0 \prod_{j=2}^n F_j}, \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (9.21) und (9.22) für die Zweigverstärkungen, so lassen sich die obigen Ausdrücke für die statischen

Empfindlichkeiten vereinfachen. Man erhält

$$E_{L_n}^{\text{BBNF}} = \frac{1_n P_0}{P_0}, \quad E_{L_0}^{\text{BBNF}} = \frac{L_0}{P_0},$$

$$E_{L_m}^{BBNF} = \frac{L_m p_{n-m}}{p_0} \quad , \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$E_{p_m}^{BBNF} = \frac{L_{n-m} p_m}{p_0} \quad , \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$E_{p_0}^{BBNF} = \frac{l_n p_0 - l_0}{p_0} \quad , \quad E_{F_1}^{BBNF} = \frac{l_0 - l_n p_0}{p_0}$$

$$E_{F_m}^{BBNF} = \frac{-L_{n-m+1} p_{m-1}}{p_0} \quad , \quad m = 2, 3, \dots, n$$

Daraus folgt für die statische Summenempfindlichkeit der Beobachtbarkeitsnormalform

$$SE^{BBNF} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_n p_0| + 2 |l_0 - l_n p_0| + |L_0| + \sum_{m=1}^{n-1} |L_m p_{n-m}| + 2 \sum_{m=1}^{n-1} |L_{n-m} p_m| \right\} \quad (9.24)$$

Da die Beträge der L_i , $i=0,1,\dots,n-1$ in der Beobachtbarkeitsnormalform gleich den Beträgen der K_i , $i=0,1,\dots,n-1$ in der Steuerbarkeitsnormalform sind, besitzen die Steuerbarkeits- und die Beobachtbarkeitsnormalform dieselbe statische Summenempfindlichkeit. Die statische Summenempfindlichkeit der Beobachtbarkeitsnormalform (und damit auch der Steuerbarkeitsnormalform) ist in der Regel wesentlich größer als die der Regelungs- und der Beobachternormalform, da sie mit wachsender Reglerordnung ebenfalls größer wird. Es kann gezeigt werden, daß die Beziehung

$$SE^{BBNF} \geq SE^{RNF}$$

gilt.

Beweis: Setzt man den Ausdruck für L_0 aus Gleichung (9.22)

$$L_0 = l_0 - l_n p_0 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i p_{n-i}$$

in die Summenempfindlichkeit (9.24) der Beobachtbarkeitsnormalform ein, so erkennt man folgenden Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_n p_0| + 2 |l_0 - l_n p_0| + |l_0 - l_n p_0 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i p_{n-i}| + 3 \sum_{i=1}^{n-1} |L_i p_{n-i}| \right\} &\geq \\ &\geq \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_n p_0| + 3 |l_0 - l_n p_0| \right\} \end{aligned}$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur für den Spezialfall, daß alle L_i , $i=1, \dots, n-1$ identisch Null sind. Da die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform aber gerade die Form

$$SE^{RNF} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_n p_0| + 3 |l_0 - l_n p_0| \right\}$$

besitzt, ist gezeigt, daß die statische Summenempfindlichkeit der Beobachtbarkeitsnormalform (und damit auch der Steuerbarkeitsnormalform) nie kleiner als die der Regelungsnormalform werden kann.

9.5 DIE DIAGONALFORM

Die Zweigverstärkungen der bisher betrachteten Normalformen für die Regler-Realisierung konnten direkt aus den Koeffizienten der Regler-übertragungsfunktion berechnet werden. Für die Realisierung des Reglers in Diagonalform benötigt man dagegen die Eigenwerte λ_i des Reglers, die sich als Lösung der charakteristischen Gleichung ergeben. Dadurch wird die mathematische Behandlung der Diagonalform wesentlich erschwert, so daß im folgenden nur Aussagen für Regler bis zu dritter Ordnung gemacht werden.

Eine weitere Einschränkung besteht darin, daß lediglich Regler mit reellen Eigenwerten betrachtet werden können, da komplexe Eigenwerte nur in Blöcken von mindestens zweitem Grad realisiert werden können.

Im folgenden werden Diagonalformen zweiter und dritter Ordnung untersucht. Eine Untersuchung der Diagonalform erster Ordnung erübrigt sich, da sie mit der Regelungs-Normalform erster Ordnung übereinstimmt.

9.5.1 DIAGONALFORM FÜR REGLER ZWEITER ORDNUNG

Die Übertragungsfunktion eines Zustandsreglers zweiter Ordnung lautet

$$F_R(s) = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^2 + p_1 s + p_0} \quad (9.25)$$

Besitzt der Regler zwei einfache reelle Eigenwerte $-\lambda_1$ und $-\lambda_2$, so läßt sich $F_R(s)$, wie in Bild 9.6 gezeigt, in Diagonalform realisieren.

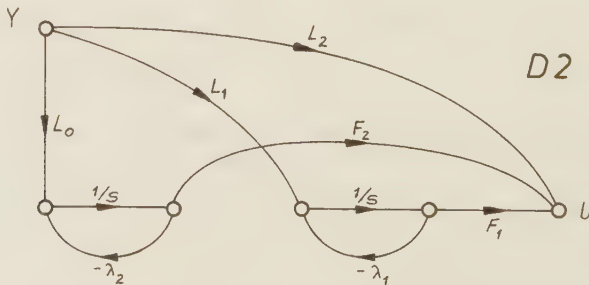


Bild 9.6

Die Übertragungsfunktion der Realisierung nach Bild 9.6 hat die Gestalt

$$D2(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{L_2 s^2 + (L_0 F_2 + L_1 F_1 + L_2 [\lambda_1 + \lambda_2]) s + L_0 F_2 \lambda_1 + L_1 F_1 \lambda_2 + L_2 \lambda_1 \lambda_2}{s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) s + \lambda_1 \lambda_2} \quad (9.26)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der Übertragungsfunktion (9.25) und den Zweigverstärkungen der Diagonalform lauten

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_2 = 1, \quad L_2 = 1_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = p_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = p_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{F_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[(1_0 - 1_2 p_0) - \lambda_1 (1_1 - 1_2 p_1) \right] \\ L_0 &= \frac{1}{F_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[- (1_0 - 1_2 p_0) + \lambda_2 (1_1 - 1_2 p_1) \right] \end{aligned} \right\} .$$

Der Grenzwert der Übertragungsfunktion $D2(s)$ für $s \rightarrow 0$ ergibt sich zu

$$\lim_{s \rightarrow 0} D2(s) = \frac{L_0 F_2 \lambda_1 + L_1 F_1 \lambda_2 + L_2 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (9.28)$$

Die statischen Empfindlichkeiten $E_{\lambda_i}^{D2}$ berechnen sich damit nach Gleichung (9.6) zu

$$\begin{aligned} E_{L_0}^{D2} &= \frac{L_0 F_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}, & E_{L_1}^{D2} &= \frac{L_1 F_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \\ E_{L_2}^{D2} &= \frac{L_2 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}, & E_{F_1}^{D2} &= \frac{L_1 F_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \\ E_{F_2}^{D2} &= \frac{L_0 F_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}, & E_{\lambda_1}^{D2} &= \frac{-L_1 F_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \\ E_{\lambda_2}^{D2} &= \frac{-L_0 F_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (9.27), so erhalten die statischen Empfindlichkeiten die Form

$$\begin{aligned} E_{L_0}^{D2} &= \frac{\lambda_1 [-(1_0 - 1_2 p_0) + \lambda_2 (1_1 - 1_2 p_1)]}{p_0 (\lambda_2 - \lambda_1)} = E_{F_2}^{D2} = -E_{\lambda_2}^{D2} \\ E_{L_1}^{D2} &= \frac{\lambda_2 [(1_0 - 1_2 p_0) - \lambda_1 (1_1 - 1_2 p_1)]}{p_0 (\lambda_2 - \lambda_1)} = E_{F_1}^{D2} = -E_{\lambda_1}^{D2} \end{aligned}$$

$$E_{L_2}^{D2} = \frac{l_2 p_0}{p_0} \quad .$$

Die statische Summenempfindlichkeit der Diagonalform zweiter Ordnung lautet somit

$$SE^{D2} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_2 p_0| + 3 \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} |-l_0 + l_2 p_0 + \lambda_2 (l_1 - l_2 p_1)| + \right. \\ \left. + 3 \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} |l_0 - l_2 p_0 - \lambda_1 (l_1 - l_2 p_1)| \right\}. \quad (9.29)$$

Es läßt sich zeigen, daß die statische Summenempfindlichkeit SE^{D2} nicht kleiner als die entsprechende Summenempfindlichkeit SE^{RNF} , jedoch bedeutend größer als diese werden kann.

Beweis: Die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform zweiter Ordnung besitzt die Form

$$SE^{RNF} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_2 p_0| + 3 |l_0 - l_2 p_0| \right\}. \quad (9.30)$$

Führt man die Bezeichnungen

$$l_0 - l_2 p_0 = \alpha \\ \text{und} \quad l_1 - l_2 p_1 = \beta$$

ein, so lautet die Summenempfindlichkeit der Diagonalform zweiter Ordnung

$$SE^{D2} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_2 p_0| + 3 \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} |-\alpha + \lambda_2 \beta| + \right. \\ \left. + 3 \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} |\alpha - \lambda_1 \beta| \right\} \quad (9.31)$$

Setzt man $\alpha - \lambda_1 \beta = \vartheta \alpha$

oder $\beta = \frac{(1-\vartheta)}{\lambda_1} \alpha$ in den Ausdruck (9.31) ein, so ergibt sich

$$SE^{D2} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_2 p_0| + 3 \frac{|\alpha|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left[|\lambda_2 - \lambda_1 - \vartheta \lambda_2| + |\vartheta \lambda_2| \right] \right\} \quad .$$

Der Ausdruck in eckiger Klammer ist aber gerade gleich oder größer $|\lambda_2 - \lambda_1|$ in Abhängigkeit von ϑ . Für

$$0 \leq \frac{\vartheta \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \leq 1$$

oder
$$0 \leq \frac{\lambda_2 [(\ell_0 - \ell_2 p_0) - \lambda_1 (\ell_1 - \ell_2 p_1)]}{(\lambda_2 - \lambda_1) (\ell_0 - \ell_2 p_0)} \leq 1 \quad (9.32)$$

gilt somit $SE^{D2} = SE^{RNF}$

und sonst $SE^{D2} > SE^{RNF}$.

9.5.2 DIAGONALFORM FÜR REGLER DRITTER ORDNUNG

Die Übertragungsfunktion eines Zustandsreglers dritter Ordnung lautet

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0} \quad (9.33)$$

Besitzt der Regler drei einfache reelle Eigenwerte $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ und $-\lambda_3$, so läßt sich $F_R(s)$, wie in Bild 9.7 gezeigt, in Diagonalform realisieren.

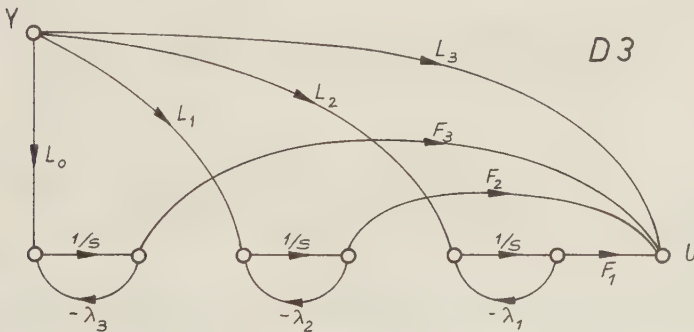


Bild 9.7

Die Übertragungsfunktion der Diagonalform dritter Ordnung nach Bild 9.7 hat die Form

$$D3(s) = \frac{Z_3(s)}{s^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)s^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)s + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (9.34)$$

mit

$$\begin{aligned} Z_3(s) = & L_3 s^3 + [L_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + L_2 F_1 + L_1 F_2 + L_0 F_3] s^2 + \\ & + [L_3(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + L_2 F_1(\lambda_2 + \lambda_3) + L_1 F_2(\lambda_1 + \lambda_3) + L_0 F_3(\lambda_1 + \lambda_2)] s + \\ & + L_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + L_2 F_1 \lambda_2 \lambda_3 + L_1 F_2 \lambda_1 \lambda_3 + L_0 F_3 \lambda_1 \lambda_2 \quad . \end{aligned}$$

Die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der Übertragungsfunktion (9.33) und den Zweigverstärkungen der Diagonalform nach Bild 9.7 lauten:

$$\begin{aligned}
 L_3 &= \ell_3, & F_1 &= F_2 = F_3 = 1 \\
 \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= p_2, & \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 &= p_1 \\
 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= p_0 \\
 L_2 &= \frac{\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2}{F_1 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\
 L_1 &= \frac{-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2}{F_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\
 L_0 &= \frac{\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2}{F_3 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}
 \end{aligned} \quad (9.35)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \ell_0 - \ell_3 p_0 \\
 \beta &= \ell_1 - \ell_3 p_1 \\
 \gamma &= \ell_2 - \ell_3 p_2
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert der Übertragungsfunktion $D3(s)$ für $s \rightarrow 0$ ergibt sich zu

$$\lim_{s \rightarrow 0} D3(s) = \frac{L_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + L_2 F_1 \lambda_2 \lambda_3 + L_1 F_2 \lambda_1 \lambda_3 + L_0 F_3 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (9.36)$$

Damit errechnen sich die statischen Empfindlichkeiten $E_{\alpha_i}^{D3}$ nach Gleichung (9.6) zu:

$$\begin{aligned}
 E_{L3}^{D3} &= \frac{L_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, & E_{L2}^{D3} &= \frac{L_2 F_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \\
 E_{L1}^{D3} &= \frac{L_1 F_2 \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, & E_{L0}^{D3} &= \frac{L_0 F_3 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \\
 E_{F1}^{D3} &= \frac{L_2 F_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, & E_{F2}^{D3} &= \frac{L_1 F_2 \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \\
 E_{F3}^{D3} &= \frac{L_0 F_3 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, & E_{\lambda_1}^{D3} &= \frac{-L_2 F_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \\
 E_{\lambda_2}^{D3} &= \frac{-L_1 F_2 \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, & E_{\lambda_3}^{D3} &= \frac{-L_0 F_3 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (9.35), so erhalten die statischen Empfindlichkeiten die Form

$$\begin{aligned} E_{L3}^{D3} &= \frac{l_3 p_0}{p_0} , \\ E_{L2}^{D3} &= E_{F1}^{D3} = - E_{\lambda_1}^{D3} = \frac{\lambda_2 \lambda_3 (\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2)}{p_0 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ E_{L1}^{D3} &= E_{F2}^{D3} = - E_{\lambda_2}^{D3} = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2)}{p_0 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ E_{L0}^{D3} &= E_{F3}^{D3} = - E_{\lambda_3}^{D3} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2)}{p_0 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} . \end{aligned}$$

Die statische Summenempfindlichkeit der Diagonalform dritter Ordnung lautet somit

$$\begin{aligned} SE^{D3} &= \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_3 p_0| + 3 \left| \frac{\lambda_2 \lambda_3 (\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \right| + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left| \frac{\lambda_1 \lambda_3 (-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right| + 3 \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right| \right\} , \end{aligned} \quad (9.37)$$

$$\text{mit } \alpha = l_0 - l_3 p_0$$

$$\beta = l_1 - l_3 p_1$$

$$\gamma = l_2 - l_3 p_2 .$$

Es zeigt sich, daß die statische Summenempfindlichkeit SE^{D3} der Diagonalform dritter Ordnung höchstens gleich der statischen Summenempfindlichkeit SE^{RNF} der Regelungsnormalform, jedoch nie kleiner als diese werden kann.

Der Ausdruck für die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform besitzt die Gestalt

$$SE^{RNF} = \frac{1}{|p_0|} \left\{ |l_3 p_0| + 3 |\alpha| \right\} . \quad (9.38)$$

Es ist also zu zeigen, daß die Beziehung (9.39)

$$\left| \frac{\lambda_2 \lambda_3 (\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \right| + \left| \frac{\lambda_1 \lambda_3 (-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right| + \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right| \geq |\alpha|$$

gilt.

Beweis: Eine triviale Umformung der Ungleichung (9.39) führt auf

$$|A_1| |\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2| + |A_2| |-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2| + |A_3| |\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2| \geq |\alpha| \quad (9.40)$$

$$\text{mit } A_1 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad A_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \quad A_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Betrachtet man α als Konstante, so stellt das Funktional

$f_1(\beta, \gamma) = A_1 (\alpha - \beta \lambda_1 + \gamma \lambda_1^2)$ eine Fläche dar, welche die β - γ -Ebene entlang der Geraden $\beta \lambda_1 - \gamma \lambda_1^2 = \alpha$ durchstößt. Durch die Betragsbildung wird derjenige Teil der Fläche, welcher unterhalb der β - γ -Ebene liegt, entlang dieser Geraden nach oben geklappt. Sinngemäß besitzt die Fläche $|f_2(\beta, \gamma)| = |A_2| |-\alpha + \beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2|$ einen Knick entlang der Geraden $\beta \lambda_2 - \gamma \lambda_2^2 = \alpha$ und die Fläche $|f_3(\beta, \gamma)| = |A_3| |\alpha - \beta \lambda_3 + \gamma \lambda_3^2|$ entlang der Geraden $\beta \lambda_3 - \gamma \lambda_3^2 = \alpha$. Die drei Geraden schneiden sich in der β - γ -Ebene in drei verschiedenen Punkten, da einfache Eigenwerte vorausgesetzt sind. Bild 9.8 zeigt die drei Geraden und deren Schnittpunkte in der β - γ -Ebene.

In den Ecken des Dreiecks P_{12} , P_{13} , P_{23} sind jeweils zwei Funktionen $f_i(\beta, \gamma)$ gleich Null, während die dritte gerade den Wert α annimmt.

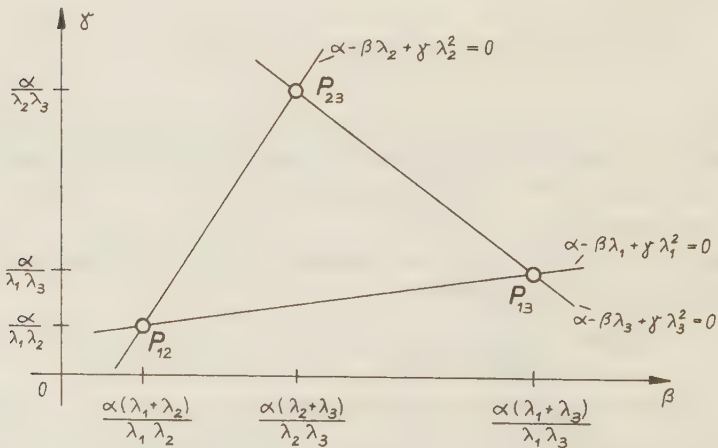


Bild 9.8

Bildet man z.B. für den linken unteren Schnittpunkt P_{12} die Summe der $|f_i(\beta, \gamma)|$, so ergibt sich

$$0 + 0 + \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right| |\alpha - \frac{\alpha \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{\alpha \lambda_3^2}{\lambda_1 \lambda_2}| = |\alpha|$$

Entsprechende Ergebnisse liefert das Einsetzen der anderen beiden Schnittpunkte P_{13} und P_{23} . Die drei Flächen steigen also von den Dreieckskanten $f_i(\beta, \gamma) = 0$ nach beiden Seiten an, wobei sie über der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks gerade den Wert $|\alpha|$ annehmen. Bild 9.9 zeigt eine räumliche Darstellung der Flächen $|f_i(\beta, \gamma)|$ über dem Dreieck P_{12}, P_{13}, P_{23} .

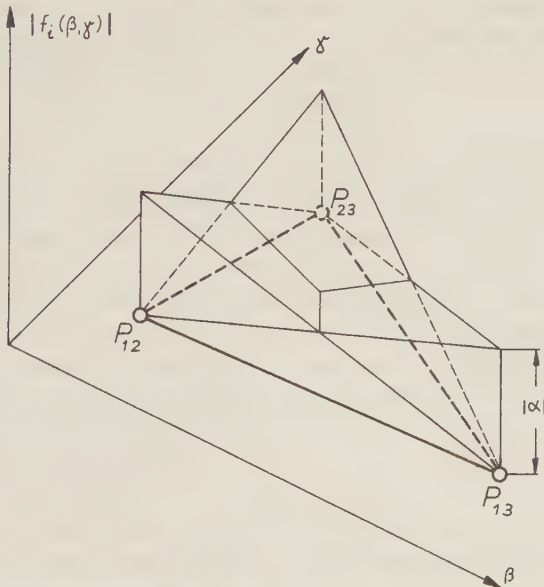


Bild 9.9

Eine Summation der drei Flächen $|f_i(\beta, \gamma)|$ über der Dreiecksfläche ergibt ein Plateau der Höhe $|\alpha|$. Liegen die Parameter der Reglerübertragungsfunktion also in dem Bereich, der durch das Dreieck P_{12}, P_{13}, P_{23} eingegrenzt wird, ist die statische Summenempfindlichkeit der Diagonalfom dritter Ordnung gleich groß wie die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform.

Bildet man die lineare Summe der $f_i(\beta, \gamma)$, so ergibt sich

$$f_1(\beta, \gamma) + f_2(\beta, \gamma) + f_3(\beta, \gamma) = \alpha.$$

Durch die lineare Addition der $f_i(\beta, \gamma)$ entsteht also über der gesamten β, γ -Ebene ein Plateau der Höhe α . Durch die Betragsbildung werden die Einzelflächen entlang den Geraden des Dreiecks P_{12}, P_{13}, P_{23} hochgeklappt, so daß außerhalb dieses Dreiecks die Summe der $|f_i(\beta, \gamma)|$, $i=1,2,3$ immer größer als $|\alpha|$ ist.

Damit ist gezeigt, daß die statische Summenempfindlichkeit $SE^{D3} \geq SE^{RNF}$ ist, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Parameter β und γ innerhalb des durch das Dreieck P_{12}, P_{13}, P_{23} eingeschlossenen Gebietes liegen. Wie klein dieses Gebiet ist, zeigt Bild 9.10, das für die Parameter $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ und $\alpha = -9$ gezeichnet wurde.

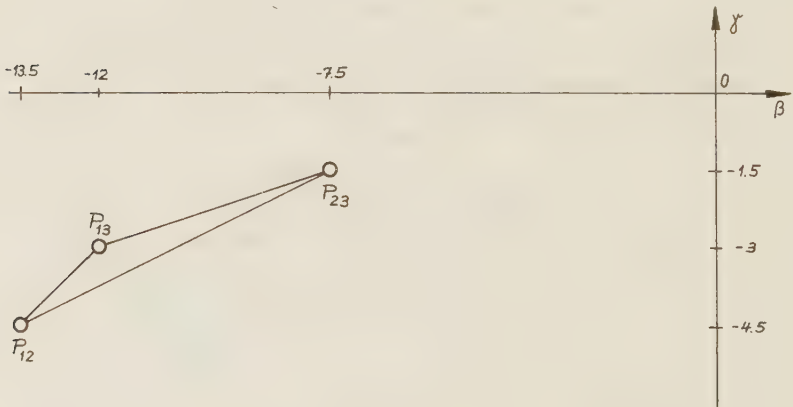


Bild 9.10

Die Ergebnisse für die Diagonalform zweiter und dritter Ordnung legen die Vermutung nahe, daß für die statische Summenempfindlichkeit SE^{Dn} einer Diagonalform n -ter Ordnung ebenfalls die Bedingung

$$SE^{Dn} \geq SE^{RNF}$$

erfüllt ist, wobei das Gleichheitszeichen in einem $(n-1)$ -dimensionalen Körper gilt.

9.6 DISKUSSION DER ERGEBNISSE

In den Kapiteln 9.1 ÷ 9.5 wurden die statischen Summenempfindlichkeiten für verschiedene kanonische Realisierungen einer Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_n s^n + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

bestimmt. Für die Beobachter-, die Regelungs-, die Steuerbarkeits- und die Beobachtbarkeitsnormalform konnten die statischen Summenempfindlichkeiten für Regler beliebiger Ordnung angegeben werden. Bei der Diagonalform wurden dagegen nur Regler bis zur dritten Ordnung betrachtet.

Die Untersuchungen ergaben, daß die statischen Summenempfindlichkeiten der Steuerbarkeits- und der Beobachtbarkeitsnormalform höchstens gleich, aber nie kleiner als die statische Summenempfindlichkeit der Regelungsnormalform werden können. Für die Diagonalformen zweiter und dritter Ordnung gilt dasselbe, wobei die Ergebnisse die Vermutung nahe legen, daß dies auch für Diagonalformen höherer Ordnung der Fall ist.

Die statischen Summenempfindlichkeiten der Beobachtbarkeitsnormalform, der Steuerbarkeitsnormalform und der Diagonalform sind also in der Regel größer als die der Regelungsnormalform und nie kleiner. Daher gibt es für die Suche nach der Normalform mit kleinster statischer Summenempfindlichkeit praktisch nur zwei Kandidaten, nämlich die Beobachter- und die Regelungsnormalform. Welche der beiden die günstigere ist, kann anhand der einfachen Ungleichung

$$0.5 \leq \frac{l_n p_0}{l_0} \leq 1.25 \quad (9.41)$$

festgestellt werden. Befinden sich die Parameter l_n , l_0 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion innerhalb des durch Ungleichung (9.41) definierten Bereiches, dann besitzt die Regelungsnormalform eine kleinere statische Summenempfindlichkeit als die Beobachternormalform. Befinden sich die Parameter l_n , l_0 und p_0 jedoch außerhalb, ist die statische Summenempfindlichkeit der Beobachternormalform kleiner als die aller anderen Normalformen. Da der in (9.41) definierte Bereich sehr klein ist, stellt die Beobachternormalform "fast immer" die günstigste aller betrachteten Normalformen dar.

10 NUMERISCHE UNTERSUCHUNGEN DER EMPFINDLICHKEIT VON ZUSTANDSREGLERN

10.1 Einleitende Bemerkungen

Die in Kapitel 9 durchgeführten Untersuchungen ergaben sehr einfache Kriterien zur Klassifikation der Reglernormalformen im Hinblick auf ihr Empfindlichkeitsverhalten. Die Ergebnisse wurden jedoch unter zwei einschränkenden Bedingungen gewonnen. Betrachtet wurde zum einen nur die Zusatzbewegung des isolierten Reglers und darüber hinaus nur der Endwert dieser Zusatzbewegung, also das statische Verhalten des Reglers.

Den Regelungstechniker interessiert aber vor allem die Veränderung der Dynamik im geschlossenen Regelkreis. Wie groß die durch ungenaue Reglerparameter entstehenden Abweichungen vom Nominalverhalten sein dürfen, hängt vom jeweiligen Anwendungsfall ab. Die Stabilitätsgrenze darf jedoch unter keinen Umständen überschritten werden. Die verschiedenen Reglerrealisierungen werden deshalb unter dem Gesichtspunkt miteinander verglichen, wie groß der Prozentsatz der Parameterungenauigkeiten im Regler sein darf, ohne daß der Regelkreis instabil werden kann. Die kritische Fehlerschranke ist der kleinste Prozentsatz, bei dem das erste Mal der Stabilitätsrand erreicht werden kann.

Eine Reglerrealisierung wird als umso unempfindlicher bezeichnet, je größer ihre kritische Fehlerschranke ist.

Anhand numerischer Untersuchungen soll im folgenden überprüft werden, ob und wie weit die Klassifikation der Reglernormalformen anhand ihrer statischen Summenempfindlichkeit Aussagen über die kritische Fehlerschranke der Regler zuläßt.

10.2 ZUR DEFINITION DER KRITISCHEN FEHLERSCHRANKE

Das Ergebnis des Reglerentwurfs im Frequenzbereich ist die Übertragungsfunktion $F_R(s)$ des Reglers. Betrachtet werden im folgenden Regler zweiter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F_R^n(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^2 + p_1 s + p_0} \quad (10.1)$$

Die allgemeinste Form einer Minimalrealisierung für diese Reglerübertragungsfunktion zeigt der Signalflußgraph in Bild 10.1.

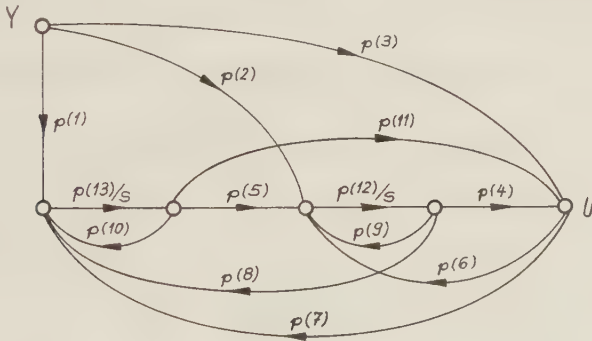


Bild 10.1

Es wird angenommen, daß jede der 13 Zweigverstärkungen fehlerbehaftet sein kann. Die maximale Größe der Fehler betrage $\kappa\%$ (gleiche Klassengenauigkeit), so daß sich die Istwerte $p(i)$ der Zweigverstärkungen aus den Nominalwerten $p^n(i)$ über die Beziehung

$$p(i) = p^n(i) [100 + \kappa \eta(i)] / 100 \quad (10.2)$$

ergeben.

Die $\eta(i)$, $i=1, \dots, 13$ sind Fehlerindikatoren, mit

$$-1 \leq \eta(i) \leq 1,$$

welche die Lage des i -ten Parameters innerhalb seines Toleranzbandes festlegen. Der Einfachheit halber werden die $\eta(i)$ im Fehlervektor $\underline{\eta}^T = [\eta(1) \ \eta(2) \ \dots \ \eta(13)]$ zusammengefaßt.

Bei der Festlegung einer bestimmten Reglerrealisierung existieren 6 Freiheitsgrade. Die Integratorverstärkungen stellen keine echten Freiheitsgrade dar, weil sie multiplikativ in alle anliegenden Zweige eingehen. Die Integratorverstärkungen $p^n(12)$ und $p^n(13)$ können deshalb ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit gleich Eins gesetzt werden.

Gibt man z.B. die sechs Zweigverstärkungen

$$p^n(4), p^n(5), p^n(8), p^n(9), p^n(10) \text{ und } p^n(11)$$

vor, so ergeben sich die restlichen Reglerparameter zu

$$p^n(1) = \frac{ZP1}{NEN}$$

$$\text{mit } ZP1 = 1_0 + 1_2 [p^n(5)p^n(8) - p^n(9)p^n(10)] -$$

$$- \frac{p^n(8)p^n(11) - p^n(4)p^n(10)}{p^n(4)} \left\{ 1_2 [p^n(9) + p^n(10)] + 1_1 \right\}$$

$$\text{und } NEN = p^n(4)p^n(5) - p^n(9)p^n(11) - \frac{p^n(11)[p^n(8)p^n(11) - p^n(4)p^n(10)]}{p^n(4)},$$

$$p^n(2) = \frac{1_1 + 1_2 [p^n(9) + p^n(10)] - p^n(1)p^n(11)}{p^n(4)},$$

$$p^n(3) = 1_2,$$

$$p^n(7) = \frac{ZP7}{NEN}$$

$$\text{mit } ZP7 = -p_0 - p^n(5)p^n(8) + p^n(9)p^n(10) -$$

$$- \frac{p^n(8)p^n(11) - p^n(4)p^n(10)}{p^n(4)} [-p_1 - p^n(9) - p^n(10)],$$

$$p^n(6) = \frac{-p_1 - p^n(9) - p^n(10) - p^n(7)p^n(11)}{p^n(4)}.$$

Die Übertragungsfunktion des Reglers nach Bild 10.1 lautet

$$F_R(s) = \frac{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}{s^2 + \delta s + \varepsilon} \quad (10.3)$$

mit

$$\alpha = p(3)$$

$$\beta = p(12)[p(2)p(4) - p(3)p(9)] + p(13)[p(1)p(11) - p(3)p(10)]$$

$$\gamma = p(12)p(13)\{p(1)[p(4)p(5) - p(9)p(11)] + \\ + p(2)[p(8)p(11) - p(4)p(10)] + p(3)[p(9)p(10) - p(5)p(8)]\}$$

$$\delta = -p(12)[p(9) + p(4)p(6)] - p(13)[p(10) + p(7)p(11)]$$

$$\epsilon = -p(12)p(13)\{p(4)[p(5)p(7) - p(6)p(10)] + p(11)[p(6)p(8) - p(7)p(9)] + \\ + p(5)p(8) - p(9)p(10)\}.$$

Im fehlerfreien Fall, d.h. $\kappa=0$ und $p(i) = p^n(i)$ ist $F_R(s)$ nach Gl.(10.3) identisch mit $F_R^n(s)$ nach Gl. (10.1).

Mit der Regelstrecke, welche die Übertragungsfunktion

$$F_S(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (10.4)$$

besitzt, entsteht der in Bild 10.2 gezeigte Zustandsregelkreis.

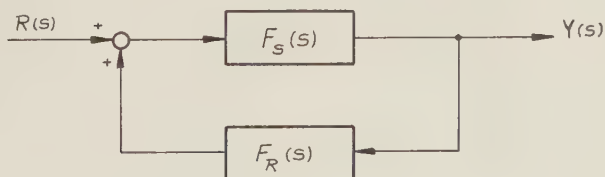


Bild 10.2

Die Übertragungsfunktion des Regelkreises nach Bild 10.2 ergibt sich

zu

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F_S(s)}{1 - F_S(s) F_R(s)} \quad (10.5)$$

Setzt man die Ausdrücke (10.3) und (10.4) ein, so folgt

$$F(s) = \frac{\frac{m_4 s^4 + m_3 s^3 + m_2 s^2 + m_1 s + m_0}{s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}}{1 - \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \cdot \frac{p(1)s^4 + p(2)s^3 + p(3)s^2 + p(4)s + p(5)}{s^5 + q_4 s^4 + q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}} \quad (10.6)$$

mit $m_4 = c_2$

$$m_3 = c_2 \delta + c_1$$

$$m_2 = c_2 \epsilon + c_1 \delta + c_0$$

$$m_1 = c_1 \epsilon + c_0 \delta$$

$$m_0 = c_0 \epsilon$$

$$n_4 = \delta + a_2 - c_2 \alpha$$

$$n_3 = \epsilon + a_2 \delta + a_1 - c_2 \beta - c_1 \alpha$$

$$n_2 = a_2 \epsilon + a_1 \delta + a_0 - c_2 \gamma - c_1 \beta - c_0 \alpha$$

$$n_1 = a_1 \epsilon + a_0 \delta - c_1 \gamma - c_0 \beta$$

$$n_0 = a_0 \epsilon - c_0 \gamma$$

Nach einem Eingangssprung $R(s)=1/s$ ergibt sich die Ist-Übergangsfunktion $Y^i(s)$ des Zustandsregelkreises zu

$$Y^i(s) = \frac{m_4 s^4 + m_3 s^3 + m_2 s^2 + m_1 s + m_0}{s(s^5 + n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0)} \quad (10.7)$$

Für die Nominalwerte der Reglerparameter ($\alpha=0$) erhält man die Nominal-Übergangsfunktion $Y^n(s)$ zu

$$Y^n(s) = \frac{m_4^n s^4 + m_3^n s^3 + m_2^n s^2 + m_1^n s + m_0^n}{s(s^5 + n_4^n s^4 + n_3^n s^3 + n_2^n s^2 + n_1^n s + n_0^n)} \quad (10.8)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich ergeben sich die in Bild 10.3 gezeigten zeitlichen Vorläufe für $y^i(t)$ und $y^n(t)$.

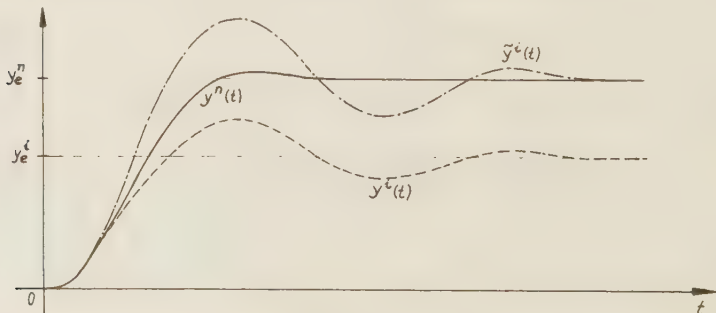


Bild 10.3

Je stärker die Reglerparameter $p(i)$ von ihren Nominalwerten $p^n(i)$ abweichen, desto größer ist auch die Abweichung zwischen der Nominal-Übergangsfunktion $y^n(t)$ und der Ist-Übergangsfunktion $y^i(t)$. Die Größe der Abweichung hängt von zwei Faktoren ab,

- 1.) von der Größe des maximalen prozentualen Fehlers, also von der Fehlerschranke κ und
- 2.) von der Größe der individuellen Fehlerindikatoren $\eta(i)$.

Für kleine Variationen eines einzelnen Parameters $p(k)$ um seinen Nominalwert $p^n(k)$ ist die Abweichung zwischen Ist- und Nominal-Übergangsfunktion dann am größten, wenn das zugehörige $\eta(k)$ entweder +1 oder -1 ist. Wenn jeder Parameter $p(i)$, $i=1, \dots, 13$ fehlerbehaftet ist, kann nicht auf einfache Weise festgestellt werden für welche Werte der $\eta(i)$, $i=1, \dots, 13$ der ungünstigste Fall, d.h. die größte Abweichung zwischen der Nominal- und der Ist-Übergangsfunktion des Regelkreises auftritt. Eine wesentliche Vereinfachung ist es, wenn die größte Abweichung dann auftritt, wenn alle $|\eta(i)| = 1$ sind, das heißt, wenn alle Koeffizienten mit dem größtmöglichen Fehler behaftet sind. Es existiert dann eine endliche Anzahl von "Kandidaten für den ungünstigsten Fall"; beim betrachteten Regler zweiter Ordnung mit 13 Parametern sind dies gerade $2^{13} = 8192$.

Eine ± 1 Verteilung für die $\eta(i)$ stellt zwar häufig den ungünstigsten Fall dar, jedoch nicht immer. Dadurch existiert für den ungünstigsten Fall keine endliche Menge von Kandidaten, was seine Bestimmung anhand eines Tests aller infrage kommenden Verteilungen der $\eta(i)$ unmöglich macht. Statt dessen bietet sich eine gerichtete Suche in Richtung größerer Abweichungen vom Nominalverhalten des Regelkreises an. Als Maß für diese Abweichung wird die quadratische Fläche zwischen Nominal- und Ist-Übergangsfunktion des Regelkreises verwendet.

Für eine Regelabweichung $y_d(t)$, deren Laplace-Transformierte $Y_D(s)$ durch die Funktion

$$Y_D(s) = \frac{d_0 s^{n-1} + d_1 s^{n-2} + \dots + d_{n-2} s + d_{n-1}}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (10.9)$$

gegeben ist, kann die quadratische Regelfläche

$$IE^2 = \int_0^{\infty} y_d^2 dt \quad (10.10)$$

anhand eines geschlossenen Ausdrucks berechnet werden [21]. Dieser Ausdruck hat die Gestalt

$$IE^2 = \frac{\det \underline{G}}{2a_0 \cdot \det \underline{H}} \quad (10.11)$$

Dabei ist $\underline{H}$ die (nxn)-Matrix

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & & & a_4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

deren Determinante die n-te Hurwitzdeterminante des Nennerpolynoms von (10.9) ist. Die Matrix $\underline{G}$ entsteht aus $\underline{H}$, indem man die erste Spalte von $\underline{H}$ durch den Vektor

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} d_0^2 \\ -(d_1^2 - 2d_0d_2) \\ d_2^2 - 2d_1d_3 + 2d_0d_4 \\ \vdots \\ (-1)^{k-1} \left[d_{k-1}^2 + 2 \sum_{i=k-1}^{i=n-k} (-1)^i d_{k+i-1} d_{k-i-1} \right] \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} d_{n-1}^2 \end{pmatrix} \quad \text{k-te Zeile}$$

ersetzt. Die quadratische Regelfläche zwischen Ist- und Nominal-Übergangsfunktion hat nur dann einen endlichen Wert, wenn die Endwerte bei der Übergangsfunktionen übereinstimmen.

Der Endwert y_e^n der Nominal-Übergangsfunktion

$$y_e^n = \lim_{t \rightarrow \infty} y^n(t) = \frac{m_0^n}{n_0^n} \quad (10.12)$$

und der Endwert y_e^i der Ist-Übergangsfunktion

$$y_e^i = \lim_{t \rightarrow \infty} y^i(t) = \frac{m_0^i}{n_0^i} \quad (10.13)$$

stimmen im allgemeinen jedoch nicht überein. Betrachtet wird daher statt der Ist-Übergangsfunktion nach Gleichung (10.7) die Sprungantwort

$$\begin{aligned}\tilde{Y}^i(s) &= \frac{r_0(m_4s^4 + m_3s^3 + m_2s^2 + m_1s + m_0)}{s(s^5 + n_4s^4 + n_3s^3 + n_2s^2 + n_1s + n_0)} \\ &= \frac{\tilde{m}_4s^4 + \tilde{m}_3s^3 + \tilde{m}_2s^2 + \tilde{m}_1s + \tilde{m}_0}{s(s^5 + n_4s^4 + n_3s^3 + n_2s^2 + n_1s + n_0)}\end{aligned}\quad (10.14)$$

des Regelkreises. Durch Wahl der Eingangssprunghöhe r_0 zu

$$r_0 = \frac{y_e^n}{y_e^i} = \frac{m_0^n \cdot n_0}{n_0^n \cdot m_0} \quad (10.15)$$

kann erreicht werden, daß der Endwert der Sprungantwort des Regelkreises bei fehlerbehafteten Reglerparametern mit dem Endwert der Übergangsfunktion ($r_0=1$) des Kreises bei fehlerfreien Reglerparametern übereinstimmt. Die um die Endabweichung bereinigte Sprungantwort $\tilde{Y}^i(t)$ des Regelkreises ist in Bild 10.3 strichpunktiert eingetragen.

Die quadratische Fläche E^2 zwischen der Nominal-Übergangsfunktion $y^n(t)$ und der bereinigten Sprungantwort $\tilde{Y}^i(t)$ des Regelkreises kann anhand der Formel (10.11) berechnet werden.

Setzt man die Ausdrücke (10.8) und (10.14) in die Beziehung

$$Y_D(s) = Y^n(s) - \tilde{Y}^i(s)$$

ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (10.15) der Ausdruck

$$Y_D(s) = \frac{d_1s^8 + d_2s^7 + d_3s^6 + d_4s^5 + d_5s^4 + d_6s^3 + d_7s^2 + d_8s + d_9}{s^{10} + a_1s^9 + a_2s^8 + a_3s^7 + a_4s^6 + a_5s^5 + a_6s^4 + a_7s^3 + a_8s^2 + a_9s + a_{10}} \quad (10.16)$$

mit

$$d_1 = m_4^n - \tilde{m}_4$$

$$d_2 = m_4^n n_4 - \tilde{m}_4 n_4^n + m_3^n - \tilde{m}_3$$

$$d_3 = m_4^n n_3 - \tilde{m}_4 n_3^n + m_3^n n_4 - \tilde{m}_3 n_4^n + m_2^n - \tilde{m}_2$$

$$d_4 = m_4^n n_2 - \tilde{m}_4 n_2^n + m_3^n n_3 - \tilde{m}_3 n_3^n + m_2^n n_4 - \tilde{m}_2 n_4^n + m_1^n - \tilde{m}_1$$

$$\begin{aligned}d_5 = m_4^n n_1 - \tilde{m}_4 n_1^n + m_3^n n_2 - \tilde{m}_3 n_2^n + m_2^n n_3 - \tilde{m}_2 n_3^n + m_1^n n_4 - \tilde{m}_1 n_4^n + \\ + m_0^n - \tilde{m}_0\end{aligned}$$

$$d_6 = m_4^n n_0 - \tilde{m}_4^n n_0^n + m_3^n n_1 - \tilde{m}_3^n n_1^n + m_2^n n_2 - \tilde{m}_2^n n_2^n + m_1^n n_3 - \tilde{m}_1^n n_3^n + \\ + m_0^n n_4 - \tilde{m}_0^n n_4^n$$

$$d_7 = m_3^n n_0 - \tilde{m}_3^n n_0^n + m_2^n n_1 - \tilde{m}_2^n n_1^n + m_1^n n_2 - \tilde{m}_1^n n_2^n + m_0^n n_3 - \tilde{m}_0^n n_3^n$$

$$d_8 = m_2^n n_0 - \tilde{m}_2^n n_0^n + m_1^n n_1 - \tilde{m}_1^n n_1^n + m_0^n n_2 - \tilde{m}_0^n n_2^n$$

$$d_9 = m_1^n n_0 - \tilde{m}_1^n n_0^n + m_0^n n_1 - \tilde{m}_0^n n_1^n$$

$$a_1 = n_4 + n_4^n$$

$$a_2 = n_3 + n_4^n n_4 + n_3^n$$

$$a_3 = n_2 + n_4^n n_3 + n_3^n n_4 + n_2^n$$

$$a_4 = n_1 + n_4^n n_2 + n_3^n n_3 + n_2^n n_4 + n_1^n$$

$$a_5 = n_0 + n_4^n n_1 + n_3^n n_2 + n_2^n n_3 + n_1^n n_4 + n_0^n$$

$$a_6 = n_4^n n_0 + n_3^n n_1 + n_2^n n_2 + n_1^n n_3 + n_0^n n_4$$

$$a_7 = n_3^n n_0 + n_2^n n_1 + n_1^n n_2 + n_0^n n_3$$

$$a_8 = n_2^n n_0 + n_1^n n_1 + n_0^n n_2$$

$$a_9 = n_1^n n_0 + n_0^n n_1$$

$$a_{10} = n_0^n n_0$$

Bildet man den Ausdruck (10.11) für $Y_D(s)$ nach Gleichung (10.16), so erhält man die Größe der quadratischen Fläche zwischen der Nominal-Übergangsfunktion $y^n(t)$ und der bereinigten Sprungantwort des Regelkreises bei fehlerhaften Reglerparametern.

Die Determinante $\det \underline{H}$ in Formel (10.11) für IE^2 ist die Hurwitzdeterminante zehnter Ordnung des Polynoms, das multiplikativ aus den Nennerpolynomen der Regelkreisübertragungsfunktionen bei nominalen und bei fehlerbehafteten Reglerparametern entsteht. Da sich das charakteristische Polynom des Regelkreises für die nominalen Reglerkoeffizienten

nicht verändert, wird die Variation von $\det \underline{H}$ durch das Nennerpolynom (10.6) bei fehlerbehafteten Reglerparametern bewirkt. Bei Annäherung des Regelkreises an den Stabilitätsrand strebt somit $\det \underline{H}$ gegen Null, während der Wert für IE^2 für $\det \underline{G} \neq 0$ gegen Unendlich geht.

Da derjenige Fehlervektor gesucht wird, für den sich der Regelkreis bei kleinster Fehlerschranke am Stabilitätsrand befindet, kann die Suche nach diesem ungünstigsten Fehlervektor $\underline{\eta}^*$ in Richtung größerer Werte für IE^2 erfolgen.

Für die kritische Fehlerschranke κ^* einer Regler-Realisierung gilt folgendes:

- a) Für das Paar $(\kappa^*, \underline{\eta}^*)$ befindet sich der Regelkreis am Stabilitätsrand. Der Prozentsatz κ^* wird dabei mit einer Genauigkeit angegeben, die einer Gleitkommazahl mit vierstelliger Mantisse entspricht.
- b) Für das Paar $(\overline{\kappa}, \underline{\eta}^*)$ ist der Regelkreis instabil. Der Wert für $\overline{\kappa}$ entsteht aus κ^* , indem bei κ^* die letzte Stelle der Mantisse um eins inkrementiert wird. Aus $\kappa^* = 56.33$ wird also $\overline{\kappa} = 56.34$ oder aus $\kappa^* = .34$ wird $\overline{\kappa} = .3401$.
- c) Für kein $\kappa < \kappa^*$ existiert ein Fehlervektor $\underline{\eta}$, für den eine Instabilität des Regelkreises resultiert.

Derjenige Fehlervektor, welcher für ein $\kappa < \kappa^*$ zur größten Abweichung zwischen Nominal- und Ist- Verhalten des Regelkreises führt, ist nicht notwendigerweise identisch mit $\underline{\eta}^*$. Dadurch muß für jede untersuchte Fehlerschranke κ der zugehörige ungünstigste Fehlervektor neu bestimmt werden. Zur Durchführung der damit verbundenen umfangreichen Berechnungen wurde ein Digitalprogramm mit der Bezeichnung HIPWOC erstellt.

10.3 DIGITALPROGRAMM HIPWOC ZUR BESTIMMUNG DER KRITISCHEN FEHLERSCHRANKE κ^*

Die Bestimmung derjenigen 13 Fehlerindikatoren $\eta(i)$, für welche der Regelkreis am stärksten von seinem Sollverhalten abweicht, muß wiederholt durchgeführt werden, da das Ergebnis von der vorgegebenen Fehlerschranke κ abhängt. Die wiederholte Berechnung muß so lange durchgeführt werden, bis für ein minimales $\kappa = \kappa^*$ und den zugehörigen ungünstigsten Fehlervektor η^* der Regelkreis am Stabilitätsrand arbeitet, während für kein $\kappa < \kappa^*$ ein Fehlervektor existiert, bei dem eine Instabilität des Regelkreises auftritt.

Für das Aufsuchen des ungünstigsten Fehlervektors wurde eine Reihe von anwählbaren Algorithmen programmiert, deren gleichzeitige Anwendung auf ein und denselben Regelkreis die Ermittlung des Paares (κ^*, η^*) ermöglicht, welches die kritische Fehlerschranke und den zugehörigen ungünstigsten Fehlervektor darstellt.

Die Suchalgorithmen im Programm HIPWOC sind in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar in eine erste Gruppe, bei der eine gerichtete Suche nach dem ungünstigsten Fall anhand der quadratischen Regelfläche zwischen Nominalübergangsfunktion und bereinigter Sprungantwort des Regelkreises stattfindet und in eine zweite Gruppe, bei der für vorgegebene Paare (κ, η) ein reiner Stabilitätstest des Regelkreises durchgeführt wird.

Eine numerische Integration der Regelkreisgleichungen zur Berechnung der quadratischen Regelfläche zwischen Soll- und Ist- Sprungantwort des Regelkreises scheidet aus Zeitgründen aus. Durch die betrachteten großen Abweichungen in den Reglerparametern wandert ein Teil der Pole des Regelkreises in Richtung der imaginären Achse. Ein anderer Teil läuft aber in Gegenrichtung, was zu einer numerischen Instabilität der Integrationsprozedur führen kann, wenn deren Schrittweite nicht klein genug gewählt worden ist. Da die Wanderung der Pole zu großen negativen Realteilen führen kann, müßte eine sehr kleine Integrationsschrittweite gewählt werden, was zu unverträglich langen Rechenzeiten führen würde.

Eine Integration der Regelkreisgleichungen im analogen Teil des Hybridrechners scheidet aus Genauigkeitsgründen aus. Die untersuchten

Reglerstrukturen weisen zum Teil eine so große Empfindlichkeit auf, daß die Fehler im Analogrechner zu einer Instabilität des simulierten Regelkreises führen könnten. Zum anderen wären die gefundenen Ergebnisse nicht reproduzierbar. Zur numerischen Bestimmung der quadratischen Regelfläche eignet sich am besten das in Kapitel 10.2 beschriebene Verfahren über den geschlossenen Ausdruck (10.11). Hier treten numerische Probleme nur dann auf, wenn aufgrund der Fehler im Regler eine Nullstelle bei $s=0$ in der Übertragungsfunktion (10.6) des Regelkreises entsteht. Dadurch geht die Eingangssprunghöhe r_0 für die bereinigte Sprungantwort $\tilde{y}^i(t)$ gegen unendlich. Dieser Sonderfall kann im Programm leicht erkannt und umgangen werden. Er würde nur dann gewisse Schwierigkeiten bereiten, wenn er zufällig für das Paar (κ^*, η^*) aufträte.

Im Nenner des Ausdrucks (10.11) für die quadratische Regelfläche zwischen Nominal- Übergangsfunktion und bereinigter Sprungantwort tritt die Hurwitz-Determinante des Regelkreises auf. Beim Durchtritt des Regelkreises durch den Stabilitätsrand besitzt $\det \underline{H}$ eine Nullstelle. Das Vorzeichen von IE^2 kann jedoch nicht als Indikator für die Stabilität des Regelkreises verwendet werden, da $\det \underline{H}$ für instabile Strecken wieder positiv werden kann. Statt dessen muß ein vollständiger Stabilitätstest durchgeführt werden. Dafür bietet sich der Routh-Test [26] an, der sehr wenig Rechenzeit benötigt, zumal er lediglich für das Nennerpolynom fünften Grades in Gleichung (10.6) durchgeführt werden muß, während $\det \underline{H}$ aus dem Nennerpolynom zehnten Grades in Gleichung (10.16) entsteht.

Einige der untersuchten Reglerrealisierungen besitzen eine kritische Fehlerschranke von weniger als einem Prozent. Das bedeutet, daß bei kleinen Abweichungen von den Nominalwerten der Reglerparameter schon große Abweichungen in den Pollagen des geschlossenen Regelkreises auftreten. Dies gilt aber auch für die angegebenen kritischen Fehlerschranken mit den dazugehörigen ungünstigsten Fehlerverteilungen. Die Genauigkeit der normalen Zahlendarstellung im Digitalrechner EAI 640 mit 16 bit reicht daher für die Empfindlichkeitsuntersuchungen nicht aus. Es mußte statt dessen mit doppelter Genauigkeit gerechnet werden. Um eine Reproduzierbarkeit der Ergebnisse für κ^* und η^* zu gewährleisten, mußten die Reglerkoeffizienten mit 12 Stellen angegeben werden.

Für die Suche nach dem Paar $(\kappa^*, \underline{\eta}^*)$ einer Reglerrealisierung wurden im einzelnen vier Algorithmen programmiert, die nach Vorgabe einer Fehlerschranke κ den Fehlervektor $\underline{\eta}$ verändern. In den Algorithmen A und B wird der Fehlervektor $\underline{\eta}$ in Richtung größerer quadratischer Regelflächen IE^2 verändert, während in den Algorithmen C und D der Routh-Test für verschiedene Fehlervektoren durchgeführt wird. Ergibt sich mit der vorgegebenen Fehlerschranke κ eine Instabilität des Regelkreises, so wird der Prozentsatz κ soweit erniedrigt, bis sich der Regelkreis im ungünstigsten Fall gerade am Stabilitätsrand befindet.

Die vier Algorithmen haben folgenden Aufbau:

Algorithmus A: Ausgehend von einem beliebigen Startwert $\underline{\eta}_0$ für den Fehlervektor, mit $|\eta_0(i)| \leq 1$, wird für ein vorgegebenes κ der Wert für IE^2 berechnet. Dann wird ein statistisch angewähltes Element in $\underline{\eta}_0$ einer Zufallsgröße S gleichgesetzt, die im Intervall $[-1, +1]$ gleichverteilt ist. Mit dem so veränderten Fehlervektor wird IE^2 erneut berechnet und mit dem alten Wert verglichen. Ist das neue IE^2 größer als das alte, wird der veränderte Fehlervektor als Startwert für einen neuen Suchschritt verwendet, wenn nicht, das ursprüngliche $\underline{\eta}_0$.

Der Algorithmus A läuft in Richtung größerer quadratischer Regelflächen IE^2 bis 1.) der Regelkreis instabil wird oder bis 2.) ein (relatives) Maximum für IE^2 erreicht ist. Im ersten Falle wird der Prozentsatz κ so weit erniedrigt, bis der Regelkreis mit dem gefundenen $\underline{\eta}$ wieder stabil ist und der Algorithmus neu gestartet. Im zweiten Fall wird entweder κ erhöht und/oder ein Neustart - gegebenenfalls mit einem anderen Startwert für $\underline{\eta}$ - durchgeführt, um ein größeres Maximum für IE^2 oder gegebenenfalls eine Instabilität zu finden.

Algorithmus B: Der Algorithmus B unterscheidet sich vom Algorithmus A dadurch, daß bei ihm die Fehlerindikatoren $\eta(i)$ lediglich die Werte +1 oder -1 annehmen können. Es wird also das Maximum von IE^2 gesucht unter der Annahme, daß alle Reglerkoeffizienten mit dem maximal möglichen Fehler behaftet sind. Startwert für Algorithmus B ist ein beliebiger Fehlervektor $\underline{\eta}_0$ mit $|\eta_0(i)| = 1$. Durch Veränderung des Vorzeichens eines statistisch angewählten Fehlerindicators wird der Fehlervektor in Richtung größerer IE^2 verändert.

Gegenüber einem deterministischen Gradientenverfahren besitzt der in Algorithmus A und B programmierte "Random Walk" den Vorteil, daß von einem gegebenen Startwert für $\underline{\eta}_0$ aus nicht immer dasselbe (Neben-) Maximum angelaufen wird.

Algorithmus C: Ausgehend von einem Startwert $\underline{\eta}_0$ mit $|\underline{\eta}_0(i)|=1, i=1, \dots, 13$ und einer Fehlerschranke κ wird nur der Routh-Test für das Nennerpolynom (10.6) des Regelkreises durchgeführt und der Wert der zugehörigen Hurwitz-Determinante fünfter Ordnung des $\underline{H}'$ berechnet. Das Paar $(\kappa, \underline{\eta}_0)$ ist dabei so gewählt, daß sich der Regelkreis in der Nähe des Stabilitätsrandes befindet.

Nun wird das Vorzeichen eines statistisch angewählten Elements von $\underline{\eta}_0$ verändert. Verringert sich der Wert von $\det \underline{H}'$ oder resultiert eine Instabilität des Regelkreises durch diese Veränderung, so wird der veränderte Fehlervektor als Startwert für einen neuen Suchschritt verwendet. Beim Auftreten einer Instabilität wird der Prozentsatz κ gleichzeitig soweit erniedrigt, daß sich der Regelkreis gerade unterhalb des Stabilitätsrandes befindet.

Algorithmus D: Unter der Annahme $|\underline{\eta}(i)|=1, i=1, \dots, 13$ wird für ein vorgegebenes κ der Routh-Test für alle 2^{13} Permutationen des Fehlervektors $\underline{\eta}$ durchgeführt und diejenigen Fehlervektoren abgespeichert, für die sich eine Instabilität ergibt.

In den Algorithmen C und D wird also im wesentlichen für ein vorgegebenes Paar $(\kappa, \underline{\eta})$ der Routh-Test auf Stabilität des Regelkreises durchgeführt. Die Richtungsinformation in Algorithmus C aufgrund der Größe von $\det \underline{H}'$ ist nur in unmittelbarer Nähe des Stabilitätsrandes verwertbar.

Mit den Algorithmen B und C kann die kritische Fehlerschranke des Regelkreises unter der Annahme bestimmt werden, daß alle Reglerparameter um den maximal möglichen Wert von ihrem Nominalwert abweichen, d.h. daß die Fehlerindikatoren den Wert +1 oder -1 besitzen. Die so gefundene kritische Fehlerschranke werde durch das Paar $(\kappa_1^*, \underline{\eta}_1^*)$ gekennzeichnet.

Ergibt ein Test mit Algorithmus D und einer Fehlerschranke $\kappa = \kappa_1^*$ keine Instabilität des Regelkreises, so ist sichergestellt, daß es keinen Fehlervektor $\underline{\eta}$ mit $|\underline{\eta}(i)|=1$ gibt, für welchen bei einer Fehlerschranke

von κ_1^* % eine Instabilität des Regelkreises resultieren kann. Tests mit $\kappa < \kappa_1^*$ zeigen, daß auch für keine Fehlerschranke unterhalb von κ_1^* ein Fehlervektor $\underline{\eta}$ mit $|\eta(i)| = 1$ existiert, für welchen der Regelkreis instabil werden kann. Für jeden Prozentsatz $\kappa > 1.001\kappa_1^*$ ergibt sich dagegen mindestens ein Fehlervektor, für den der Regelkreis instabil ist.

Die im folgenden angegebenen Ergebnisse für die kritischen Fehlerschranken verschiedener Reglerrealisierungen wurden durch Anwendung der Algorithmen A bis D erhalten. Als günstiger Weg zur Bestimmung des Paares $(\kappa^*, \underline{\eta}^*)$ erwies sich dabei folgendes Vorgehen:

- 1.) Suche eines Paares $(\kappa_s, \underline{\eta}_s)$ mit Algorithmus B oder D, für das der Regelkreis instabil ist.
- 2.) Start des Algorithmus C mit dem gefundenen $\underline{\eta}_s$ und einem Prozentsatz κ , für den sich der Regelkreis gerade am Stabilitätsrand befindet. Dadurch tritt bei Veränderung von $\underline{\eta}_s$ in ungünstiger Richtung erneut eine Instabilität des Regelkreises auf. Durch schrittweise Erniedrigung von κ erreicht man mit Hilfe des Algorithmus C sehr schnell das Paar $(\kappa_1^*, \underline{\eta}_1^*)$.
- 3.) Test der Fehlerschranke κ_1^* mit Algorithmus D. Ergeben sich Fehlervektoren $\underline{\eta}_s$ für welche der Regelkreis instabil wird, muß erneut bei Punkt 2 begonnen werden, wenn nicht, ist das gefundene Paar $(\kappa_1^*, \underline{\eta}_1^*)$ das gesuchte.
- 4.) Ein Test der Fehlerschranke $\overline{\kappa}$ (Definition von $\overline{\kappa}$ am Ende von Kapitel (10.2) mit Algorithmus D liefert instabiles Verhalten bei $\underline{\eta}_1^*$ und gegebenenfalls bei einigen anderen Fehlervektoren.
- 5.) Start des Algorithmus A mit dem Paar $(\kappa_1^*, \underline{\eta}_1^*)$ und gegebenenfalls mit κ_1^* und den anderen, unter Punkt 4.) gefundenen Fehlervektoren. In Algorithmus A werden Werte $-1 \leq \eta(i) \leq 1$ der Fehlerindikatoren getestet. Ergibt sich für einen Fehlervektor $\underline{\eta}_z$ mit $|\eta_z(i)| \neq 1$ eine Instabilität, so wird der Algorithmus A für Prozentsätze κ knapp unterhalb der Stabilitätsgrenze des Regelkreises so lange gestartet, bis sich keine Veränderung des Fehlervektors mehr ergibt. Das gefundene Paar $(\kappa^*, \underline{\eta}^*)$ ist die gesuchte kritische Fehlerschranke der Reglerrealisierung und der zugehörige ungünstigste Fehlervektor.

Ergibt sich durch den Algorithmus A keine Veränderung des Paares $(\kappa_1^*, \underline{\eta}_1^*)$ - wobei alle unter Punkt 4 gefundenen Fehlervektoren getestet werden -

so ist es identisch mit dem Paar $(\kappa^*, \underline{\eta}^*)$.

Die gefundenen Ergebnisse für κ^* wurden schließlich noch mit den Algorithmen A und B überprüft. Ausgehend von beliebigen Startwerten η_0 konvergierten die Algorithmen gegen eine Vielzahl von Fehlervektoren, deren ungünstigster gerade mit dem gefundenen $\underline{\eta}^*$ identisch war.

Die berechneten kritischen Fehlerschranken stellen daher mit großer Wahrscheinlichkeit die tatsächlichen dar. Da zudem bei allen untersuchten Reglern der Unterschied zwischen κ^* und κ_1^* gering war, die Fehlerschranken κ_1^* aber durch Anwendung des Algorithmus D absolut erhärtet wurden, dürften die Ergebnisse für κ^* nur mit einer sehr geringen Unsicherheit behaftet sein.

Da die Unterschiede der kritischen Fehlerschranken verschiedener Realisierungen desselben Reglers zum Teil mehr als eine Größenordnung betragen, ist der Einfluß der genannten Unsicherheit verschwindend gering.

10.4 VERGLEICH VON STATISCHER SUMMENEMPFINDLICHKEIT UND KRITISCHER FEHLERSCHRANKE DER NORMALFORMEN VERSCHIEDENER ZUSTANDSREGLER

Die Betrachtungen in Kapitel 9 liefern ein einfaches Kriterium für die Beantwortung der Frage, welche Normalform eines Zustandsreglers die kleinste statische Summenempfindlichkeit besitzt.

Nun soll überprüft werden, ob diese statische Summenempfindlichkeit ein brauchbares Maß für die Beurteilung der Reglerempfindlichkeit darstellt, d.h. ob die Normalform mit kleinster statischer Summenempfindlichkeit auf die größte kritische Fehlerschranke im Regelkreis führt.

Dazu werden fünf konkrete Regelkreise untersucht, deren Zustandsregler in verschiedenen Normalformen realisiert sind. Die Bestimmung der kritischen Fehlerschranken geschieht mit dem in Kapitel 10.3 beschriebenen Digitalprogramm HIPWOC.

Die Entwurfsdaten für die Regelkreise, die Koeffizienten der betrachteten Regler-Normalformen und die ungünstigsten Fehlervektoren sind im Anhang A angegeben.

10.4.1 DER REGELKREIS ROI 1

Zunächst wird die Regelung einer Strecke dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{6s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (10.17)$$

betrachtet.

Die Pole dieser Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_{1/2}^0 = -1 \pm 3i$ und $s_3^0 = -2$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ verschoben werden. Der Beobachter möge zwei Pole bei $s = -10$ besitzen.

In Kapitel 7 wurde die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers zu

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-\frac{1073}{39}s^2 - \frac{4531}{39}s - \frac{8930}{39}}{s^2 + 26s + \frac{701}{13}} \quad (10.18)$$

berechnet. Mit den in Kapitel 9 gewählten Bezeichnungen für die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion ergeben sich die Größen

l_2 , l_0 und p_0 zu

$$l_2 = \frac{-1073}{39}, \quad l_0 = \frac{-8930}{39} \quad \text{und} \quad p_0 = \frac{701}{13}.$$

In Kapitel 9 wurde gezeigt, daß die günstigste Regler-Normalform im Hinblick auf die statische Summenempfindlichkeit entweder die Beobachter- oder die Regelungsnormalform ist. Für die anderen Normalformen ergibt sich eine statische Summenempfindlichkeit, die größer oder gleich derjenigen für die Regelungsnormalform ist.

Gilt für die Parameter l_2 , l_0 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion die Beziehung

$$0,5 < \frac{l_2 p_0}{l_0} < 1,25, \quad (10.19)$$

dann hat die Regelungsnormalform eine kleinere statische Summenempfindlichkeit als die Beobachternormalform.

$$\text{Mit } l_2 p_0 = -1483,6 \text{ und } l_0 = -228,97$$

ist die Bedingung (10.19) nicht erfüllt und somit besitzt die Beobachternormalform des Reglers mit der Übertragungsfunktion (10.18) eine geringere statische Summenempfindlichkeit als alle anderen Normalformen.

Mit dem Programm HIPWOC wurden die kritischen Fehlerschranken für die Realisierungen der Reglerübertragungsfunktion (10.18) in Beobachternormalform (BNF), in Regelungsnormalform (RNF), in Steuerbarkeitsnormalform (SNF), in Beobachtbarkeitsnormalform (BBNF) und in Diagonalform (D2) bestimmt.

Die Koeffizienten der Regler-Normalformen, die kritischen Fehlerschranken und die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren sind in Anhang A1, Tabelle A1 angegeben.

In Tabelle 10.1 sind die Ergebnisse für die statische Summenempfindlichkeit und die kritische Fehlerschranke der verschiedenen Normalformen für den betrachteten Zustandsregler zusammengestellt.

Normalform	stat. Summenempf.	krit. Fehlerschranke
B N F	$SE^{BNF} = 8.5$	$\kappa^* = 35.19 \%$
R N F	$SE^{RNF} = 97.3$	$\kappa^* = 5.147\%$
S N F	$SE^{SNF} = 1206.4$	$\kappa^* = 0.4385\%$
B B N F	$SE^{BBNF} = 1206.4$	$\kappa^* = 0.4385\%$
D 2	$SE^{D2} = 110.5$	$\kappa^* = 4.655\%$

Tabelle 10.1

Realisiert man den Zustandsregler mit der Übertragungsfunktion (10.18) in Beobachternormalform, so dürfen alle Reglerparameter $p(i)$ mit einem Fehler von $\pm 35\%$ behaftet sein, ohne daß sich eine Instabilität des Regelkreises ROI1 ergibt. Bei einer Realisierung desselben Reglers in Steuerbarkeitsnormalform kann bei Fehlern von $\pm 0.5\%$ in den Reglerkoeffizienten schon eine Instabilität des Regelkreises resultieren. Die Normalform mit der kleinsten statischen Summenempfindlichkeit besitzt also die größte kritische Fehlerschranke. Darüber hinaus ist für die anderen Normalformen das Produkt aus statischer Summenempfindlichkeit und kritischer Fehlerschranke näherungsweise konstant, so daß beim untersuchten Regler zwischen beiden in erster Näherung ein reziproker Zusammenhang besteht.

Wie die Ergebnisse in Tabelle 10.1 zeigen, haben die Beobachtbarkeits- und die Steuerbarkeitsnormalform nicht nur dieselbe statische Summenempfindlichkeit sondern auch dieselbe kritische Fehlerschranke κ^* . Da sich dies bei allen anderen untersuchten Regelkreisen ebenfalls ergibt, kann vermutet werden, daß die Beobachtbarkeitsnormalform und die Steuerbarkeitsnormalform identisches Empfindlichkeitsverhalten besitzen.

10.4.2 DER REGELKREIS ROI 2

Als zweites Beispiel wird die Regelung einer Strecke dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 1.4s^2 + 1.44s + 1.04} \quad (10.20)$$

betrachtet.

Die Pole der Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_{1/2}^0 = -0.2 \pm i$ und $s_3^0 = -1$ nach $s_{1/2}^g = -2 \pm 2i$ und $s_3^g = -3$ geschoben werden. Der Beobachter möge zwei Pole bei $s = -5$ besitzen.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers lautet (siehe anhang A2)

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-12.1525s^2 - 50.0591s - 117.907}{s^2 + 3.44756s + 10.0645} \quad (10.21)$$

Setzt man die Koeffizienten

$$l_2 = -12.1525, \quad l_0 = -117.907 \text{ und}$$

$$p_0 = 10.0645$$

in die Bedingung (10.19) ein, so ergibt sich

$$0.5 < \frac{122.3}{117.9} < 1.25.$$

Somit besitzt die Regelungsnormalform des Zustandsreglers nach Gleichung (10.21) eine kleinere statische Summenempfindlichkeit als die Beobachternormalform.

Mit dem Programm HIPWOC wurden die kritischen Fehlerschranken für die Realisierungen des Zustandsreglers in Beobachternormalform (BNF), in Regelungsnormalform (RNF), in Steuerbarkeitsnormalform (SNF) und in Beobachtbarkeitsnormalform (BBNF) bestimmt. Da die Pole der Reglerübertragungsfunktion (10.21) konjugiert komplex sind, entfällt die Diagonalform (D2).

Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Regler-Normalformen, die kritischen Fehlerschranken und die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind im Anhang A2 in Tabelle A2 angegeben.

In Tabelle 10.2 sind die statischen Summenempfindlichkeiten und die kritischen Fehlerschranken der Normalformen für den Zustandsregler nach Gleichung (10.21) zusammengestellt.

Normalform	stat. Summenempf.	krit. Fehlerschranke
B N F	$SE^{BNF} = 23.43$	$\chi^* = 38.53 \%$
R N F	$SE^{RNF} = 13.46$	$\chi^* = 68.81 \%$
S N F	$SE^{SNF} = 24.65$	$\chi^* = 36.98 \%$
B B N F	$SE^{BBNF} = 24.65$	$\chi^* = 36.98 \%$

Tabelle 10.2

Das Produkt aus den kritischen Fehlerschranken und den statischen Summenempfindlichkeiten der untersuchten Normalformen ist wiederum nahezu konstant. Somit stellt auch hier die statische Summenempfindlichkeit ein gutes Maß für die Empfindlichkeitseigenschaften der Regler-Normalformen dar.

10.4.3 DER REGELKREIS ROI 3

Die Regelstrecke des dritten Beispiels besitzt die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 1.4s^2 + 1.44s + 1.04} \quad (10.22)$$

Die Pole dieser Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_{1/2}^0 = -0.2 \pm j$ und $s_3^0 = -1$ nach $s_{1/2}^g = -2 \pm 2j$ und $s_3^g = -3$ geschoben werden. Der Beobachter möge zwei Pole bei $s = -5$ erhalten.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers lautet (siehe Anhang A3)

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-247.088s^2 - 591.699s - 504.611}{s^2 + 15.6001s + 91.7199} \quad (10.23)$$

Mit den Koeffizienten $l_2 = -247.088$, $l_0 = -504.611$ und $p_0 = 91.7199$ der Reglerübertragungsfunktion ist die Bedingung

$$0.5 < \frac{l_2 p_0}{l_0} < 1.25$$

für den betrachteten Regler offensichtlich nicht erfüllt. Damit ist die günstigste Normalform für die Realisierung des Zustandsreglers mit

der Übertragungsfunktion (10.23) die Beobachternormalform. Mit dem Programm HIPWOC wurden die kritischen Fehlerschranken für die verschiedenen Normalformen des Zustandsreglers bestimmt, wobei die Diagonalform entfällt, da die Pole des Reglers konjugiert komplex sind.

Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Regler-Normalformen, die kritischen Fehlerschranken κ^* und die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind im Anhang A3 in Tabelle A.3 angegeben.

In Tabelle 10.3 sind die statischen Summenempfindlichkeiten und die kritischen Fehlerschranken der Normalformen für den Zustandsregler des Regelkreises RO13 zusammengestellt.

Normalform	stat. Summenempf.	krit. Fehlerschranke
B N F	$SE^{BNF} = 11.0$	$\kappa^* = 16.59 \%$
R N F	$SE^{RNF} = 971.9$	$\kappa^* = 0.6686\%$
S N F	$SE^{SNF} = 2708.6$	$\kappa^* = 0.2400\%$
B B N F	$SE^{BBNF} = 2708.6$	$\kappa^* = 0.2400\%$

Tabelle 10.3

Auch hier zeigt sich wiederum eine gute Übereinstimmung zwischen der Klassifikation der Regler-Normalformen anhand der statischen Summenempfindlichkeiten und der kritischen Fehlerschranken.

10.4.4 DER REGELKREIS ROI 4

In diesem Beispiel wird die Regelung einer Strecke dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \quad (10.24)$$

betrachtet.

Die Pole der Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_1^0 = -1$, $s_2^0 = -2$ und $s_3^0 = -4$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ geschoben werden. Der Beobachter möge zwei Pole bei $s = -5$ besitzen.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers lautet (siehe Anhang A4)

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-17s^2 - 117s - 196}{s^2 + 13s + 40} \quad (10.25)$$

Mit den Koeffizienten $l_2 = -17$, $l_0 = -196$ und $p_0 = 40$ der Reglerübertragungsfunktion ist die Bedingung

$$0.5 < \frac{l_2 p_0}{l_0} < 1.25$$

nicht erfüllt. Damit ist die günstigste Normalform für die Realisierung des Zustandsreglers mit der Übertragungsfunktion (10.25) die Beobachternormalform.

Mit dem Programm HIPWOC wurden die kritischen Fehlerschranken für die fünf Normalformen des Zustandsreglers bestimmt.

Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Reglernormalformen, die kritischen Fehlerschranken κ^* und die dazugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind im Anhang A4 in Tabelle A.4 angegeben.

In Tabelle 10.4 sind die statischen Summenempfindlichkeiten und die kritischen Fehlerschranken der Normalformen für den Zustandsregler des Regelkreises ROI4 zusammengestellt.

Normalform	stat. Summenempf.	krit. Fehlerschranke
B N F	$SE^{BNF} = 9.8$	$\chi^* = 44.97 \%$
R N F	$SE^{RNF} = 53.3$	$\chi^* = 10.96 \%$
S N F	$SE^{SNF} = 164.3$	$\chi^* = 3.613 \%$
B B N F	$SE^{BBNF} = 164.3$	$\chi^* = 3.613 \%$
D 2	$SE^{D2} = 67.7$	$\chi^* = 8.951 \%$

Tabelle 10.4

Auch beim Regelkreis ROI4 zeigt sich, daß die Beurteilung der Regler-Normalformen im Hinblick auf ihr Stabilitätsverhalten im geschlossenen Regelkreis bei fehlerhaften Reglerparametern anhand der statischen Summenempfindlichkeit durchgeführt werden kann.

10.4.5 DER REGELKREIS ROI 5

Die zu regelnde Strecke besitzt die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (10.26)$$

Durch einen Zustandsregler sollen die Pole der Strecke von $s_{1,2}^0 = -1 \pm 3i$ und $s_3^0 = -2$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ geschoben werden. Der Beobachter möge zwei Pole bei $s = -10$ besitzen.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Reglers lautet (siehe Anhang A5)

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-34.3529 s^2 - 169.294 s - 841.176}{s^2 - 8.35291 s + 49.7059} \quad (10.27)$$

Dieser Regler besitzt zwei konjugiertkomplexe Pole mit positivem Realteil. Mit $l_2 = -34.3529$, $l_0 = -841.176$ und $p_0 = 49.7059$ ist die Bedingung

$$0.5 < \frac{l_2 p_0}{l_0} < 1.25$$

nicht erfüllt. Daher kann vermutet werden, daß die Beobachternormalform die günstigste Realisierung für den Regler nach Gleichung (10.27) darstellt.

Mit dem Programm HIPWOC wurden die kritischen Fehlerschranken für die vier Normalformen des Zustandsreglers bestimmt.

Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Regler-Normalformen, die kritischen Fehlerschranken κ^* und die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren sind in Anhang A5 in Tabelle A.5 angegeben.

In Tabelle 10.5 sind die statischen Summenempfindlichkeiten und die kritischen Fehlerschranken der Normalformen für den Zustandsregler des Regelkreises ROI 5 zusammengestellt.

Normalform	stat. Summenempf.	krit. Fehlerschranke
B N F	$SE^{BNF} = 33.9$	$\kappa^* = 26.24\%$
R N F	$SE^{RNF} = 86.6$	$\kappa^* = 11.52\%$
S N F	$SE^{SNF} = 358.5$	$\kappa^* = 5.106\%$
B B N F	$SE^{BBNF} = 358.5$	$\kappa^* = 5.106\%$

Tabelle 10.5

Die statische Summenempfindlichkeit stellt also auch für instabile Zustandsregler ein brauchbares Maß für die Klassifikation der Regler-Normalformen im Hinblick auf ihr Stabilitätsverhalten im geschlossenen Regelkreis bei fehlerhaften Reglerparametern dar.

10.5 ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE

In Kapitel 10.4 wurden anhand konkreter Beispiele die Empfindlichkeitseigenschaften von fünf Normalformen für die Realisierung eines Zustandsreglers untersucht. Eine Normalform wird als umso unempfindlicher bezeichnet, je größer die prozentualen Fehler in ihren Koeffizienten sein dürfen, ohne daß dadurch eine Instabilität des Regelkreises auftritt. Derjenige Prozentsatz der Fehler, für den das erste Mal der Stabilitätsrand des Regelkreises erreicht werden kann, wird als kritische Fehlerschranke κ^* bezeichnet. Die Bestimmung der kritischen Fehlerschranke eines Zustandsreglers ist mit umfangreichen Berechnungen verbunden, die für Regler höherer Ordnung zu sehr langen Rechenzeiten führen.

Wie die Untersuchungen in Kapitel 10.4 zeigen, stellt die statische Summenempfindlichkeit ein gutes Maß für die Beurteilung der kritischen Fehlerschranke von Regler-Normalformen dar. Darüber hinaus ist die Bestimmung derjenigen Normalform, welche die geringste statische Summenempfindlichkeit besitzt, sehr einfach durchzuführen.

Wenn die Koeffizienten l_n , l_0 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{l_n s^n + l_{n-1} s^{n-1} + \dots + l_1 s + l_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}$$

die Bedingung

$$0.5 \leq \frac{l_n p_0}{l_0} \leq 1.25$$

erfüllen, dann existiert keine Normalform, die eine kleinere statische Summenempfindlichkeit besitzt als die Regelungsnormalform (siehe Kapitel 9.6). Für alle anderen Werte von l_n , l_0 und p_0 ist die statische Summenempfindlichkeit der Beobachternormalform kleiner als die aller anderen Normalformen.

Die statische Summenempfindlichkeit stellt jedoch vom Ansatz her ein sehr grobes Maß für die Reglerempfindlichkeit dar. Von der gesamten Zusatzbewegung des Reglers beinhaltet sie lediglich die Information über deren statischen Endwert.

Die Ergebnisse in Kapitel 10.4 dürfen deshalb nicht dazu verleiten, die Aussagekraft der statischen Summenempfindlichkeit zu hoch einzuschätzen.

Wenn zwei Regler-Normalformen stark unterschiedliche statische Summenempfindlichkeiten besitzen läßt sich zwar mit großer Sicherheit sagen, daß zur Normalform mit kleiner statischer Summenempfindlichkeit eine große kritische Fehlerschranke κ^* gehört und umgekehrt. Für den Sonderfall, daß zwischen den statischen Summenempfindlichkeiten von Beobachternormalform, Regelungsnormalform und Diagonalform ein geringer Unterschied besteht, kann jedoch nicht mehr mit Sicherheit geschlossen werden, daß die Normalform mit kleinster Summenempfindlichkeit das größte κ^* besitzt. Die von mehreren Autoren [14], [18], [23] gezeigte gute Eigenstabilität der Diagonalform kann in diesem Fall z.B. dazu führen, daß sich trotz größerer statischer Fehler gegenüber der Regelungsnormalform eine günstigere kritische Fehlerschranke für die Diagonalform ergibt. In solchen Grenzfällen empfiehlt es sich, die in Kapitel 13 behandelte quadratische Summenempfindlichkeit zur Reglerklassifikation heranzuziehen, da sie ein schärferes Maß für die kritische Fehlerschranke darstellt als die statische Summenempfindlichkeit.

11. ERWEITERUNG DER EMPFINDLICHKEITSBETRACHTUNGEN AUF ZUSTANDSREGLER MIT I-ANTEIL

11.1 Normalformen für Zustandsregler mit I-Anteil

Bei den bisher durchgeführten Empfindlichkeitsuntersuchungen wurden Zustandsregler ohne I-Anteil betrachtet. Durch die Hinzufügung eines integrierenden Anteils wird die Ordnung des Zustandsreglers um eins erhöht und es ergibt sich eine Reglerübertragungsfunktion der Form

$$F_R^*(s) = \frac{l_n s^n + l_{n-1} s^{n-1} + \dots + l_1 s + l_0}{s(s^{n-1} + p_{n-2} s^{n-2} + \dots + p_1 s + p_0)} \quad (11.1)$$

Für die Realisierung dieser Übertragungsfunktion existieren unendlich viele Möglichkeiten, wobei die Beurteilung der Empfindlichkeit irgend-einer beliebigen Realisierung ohne umfangreiche Berechnungen aussichtslos erscheint. Erschwerend kommt hinzu, daß durch den Pol bei $s=0$ in $F_R^*(s)$ eine Betrachtung der statischen Abweichungen des Reglers oder auch des geschlossenen Regelkreises ausscheidet.

Unter diesen Umständen wäre es wünschenswert, ohne langwierige Berechnungen einfache Reglerrealisierungen mit günstigem Empfindlichkeitsverhalten angeben zu können. Dies ist mit gewissen Einschränkungen möglich.

Dazu soll zunächst der Zustandsregler zweiter Ordnung mit I-Anteil betrachtet werden. Die allgemeine Minimalrealisierung seiner Übertragungsfunktion

$$F_R^*(s) = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s(s^2 + p_1 s + p_0)} \quad (11.2)$$

hat die in Bild 11.1 gezeigte Gestalt.

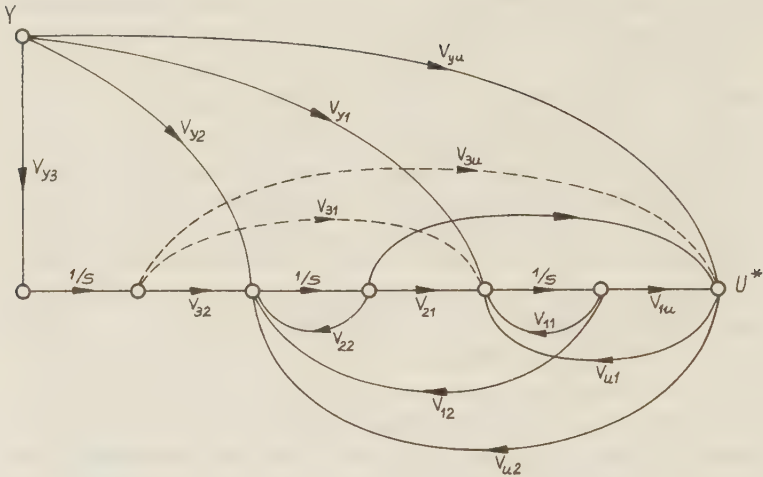


Bild 11.1

Die Realisierung nach Bild 11.1 besitzt neun Freiheitsgrade; von den fünfzehn Zweigverstärkungen V_{ij} sind neun frei vorgebar. Verzichtet man auf die beiden Freiheitsgrade, die den in Bild 11.1 gestrichelt eingezeichneten Zweigen entsprechen, so ergibt sich eine spezielle Struktur für den Zustandsregler mit I-Anteil. Sie besteht aus zwei Teilen, und zwar einem Teil, welcher genau mit dem in Bild 10.1 gezeigten Zustandsregler ohne I-Anteil übereinstimmt und einem zweiten Teil, der durch den zusätzlichen Integratorzweig entsteht.

Durch die getroffenen Einschränkungen ist es möglich, Normalformen für den Zustandsregler mit I-Anteil zu definieren, die dadurch entstehen, daß der erste Reglerteil in der entsprechenden Normalform für Regler ohne I-Anteil realisiert wird, während der I-Anteil des Reglers in jeweils gleicher Weise davorgeschaltet ist. Für einen Zustandsregler zweiter Ordnung mit I-Anteil und der Übertragungsfunktion (11.2) ergeben sich damit die in Bild 11.2 gezeigten fünf Normalformen, und zwar

- die Beobachternormalform (BNF^I) ,
- die Regelungsnormalform (RNF^I) ,
- die Steuerbarkeitsnormalform (SNF^I) ,
- die Beobachtbarkeitsnormalform $(BBNF^I)$ und
- die Diagonalform $(D2^I)$.

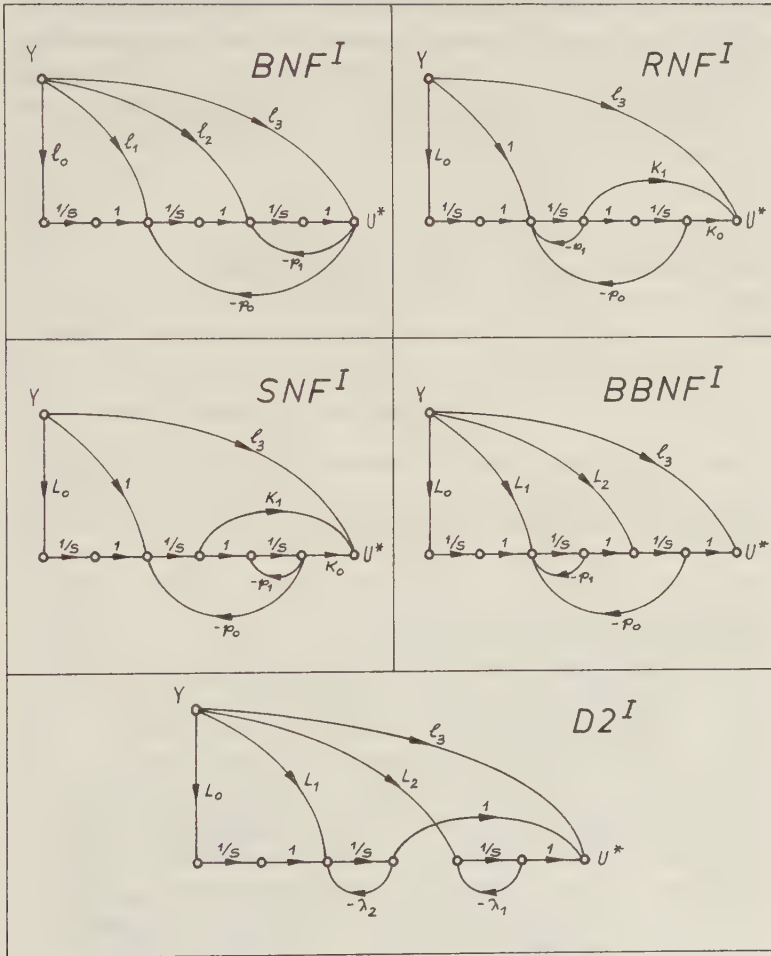


Bild 11.2

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß das Empfindlichkeitsverhalten des Zustandsreglers mit I-Anteil im wesentlichen von dem Teil des Reglers bestimmt wird, der dem Zustandsregler ohne I-Anteil entspricht.

Für Regler ohne I-Anteil konnten in Kapitel 10 sehr einfache Kriterien dafür angegeben werden, welche Normalformen bei einer vorgegebenen Reglerübertragungsfunktion das günstigste Empfindlichkeitsverhalten zeigen.

Spaltet man die Übertragungsfunktion (11.1) des Zustandsreglers mit I-Anteil auf in der Form

$$F_R^*(s) = F_{I1}(s) + F_{I2}(s) \quad (11.3)$$

mit

$$F_{I1}(s) = \frac{l_n s^{n-1} + l_{n-1} s^{n-2} + \dots + l_2 s + l_1}{s^{n-1} + p_{n-2} s^{n-2} + \dots + p_1 s + p_0}$$

und

$$F_{I2}(s) = \frac{l_0}{s (s^{n-1} + p_{n-2} s^{n-2} + \dots + p_1 s + p_0)} ,$$

so erhält man formal die Übertragungsfunktionen $F_{I1}(s)$ eines Zustandsreglers ohne I-Anteil und $F_{I2}(s)$ eines Regleranteils mit integrierendem Verhalten. Realisiert man, wie in Bild 11.3 gezeigt, die

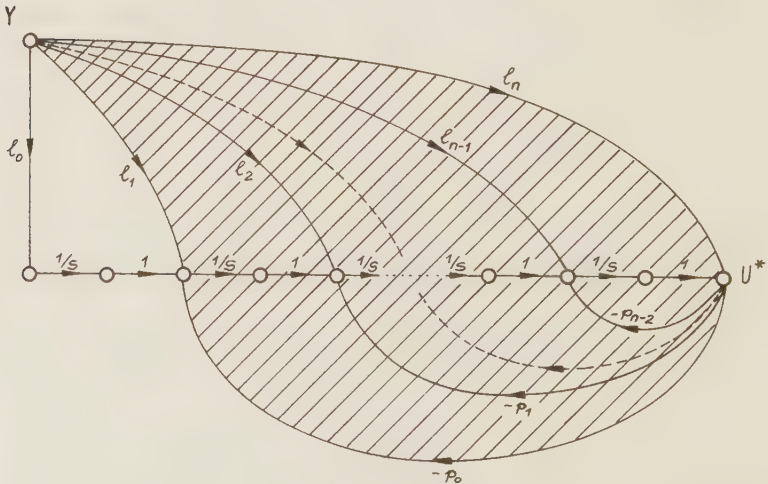


Bild 11.3

Übertragungsfunktion (11.1) in Beobachternormalform (BNF^I), so beschreibt $F_{I1}(s)$ gerade das Übertragungsverhalten des schraffierten Regleranteils ohne I-Anteil und $F_{I2}(s)$ das Übertragungsverhalten des Vorwärtzweiges, der den Integrator enthält. Es sei allerdings vermerkt, daß der enge Zusammenhang zwischen der Aufspaltung nach Gleichung (11.3) und der Reglerrealisierung nur für die Normalform BNF^I in dieser Weise gilt.

Überträgt man die Ergebnisse aus Kapitel 10 auf den Regleranteil, der durch $F_{I1}(s)$ beschrieben wird, so ergibt sich für die Abschätzung des Empfindlichkeitsverhaltens der Normalformen eines Zustandsreglers mit I-Anteil folgendes Ergebnis.

Liegen die Koeffizienten l_n , l_1 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion (11.1) außerhalb des durch die Ungleichung

$$0.5 \leq \frac{l_n p_0}{l_1} \leq 1.25 \quad (11.4)$$

definierten Wertebereichs, dann zeigt die Normalform BNF^I ein besseres Empfindlichkeitsverhalten im Hinblick auf Parameterungenauigkeiten im Regler als alle anderen Normalformen. Im Spezialfall, in dem die Parameter l_n , l_1 und p_0 innerhalb des durch (11.4) definierten Bereiches liegen, zeigt die Normalform RNF^I ein besseres Empfindlichkeitsverhalten als die Beobachternormalform BNF^I .

Die Klassifikation der Normalformen eines Zustandsreglers mit I-Anteil anhand der Bedingung (11.4) ist naturgemäß mit einer größeren Unsicherheit behaftet als das entsprechende Vorgehen bei Reglern ohne I-Anteil. Sie beruht weitgehend auf der Vermutung, daß der hinzugefügte Integrator keine wesentliche Veränderung des Empfindlichkeitsverhaltens einer als günstig erkannten Regler-Normalform bewirkt. Anhand von Empfindlichkeitsuntersuchungen in konkreten Regelkreisen gelingt es, die Richtigkeit dieser Vermutung zu untermauern.

11.2 BESTIMMUNG DER KRITISCHEN FEHLERSCHRANKE FÜR ZUSTANDSREGLER MIT I-ANTEIL

Untersucht werden Zustandsregler mit I-Anteil für Strecken dritter Ordnung. Bild 11.4 zeigt das Blockschaltbild des entsprechenden Regelkreises.

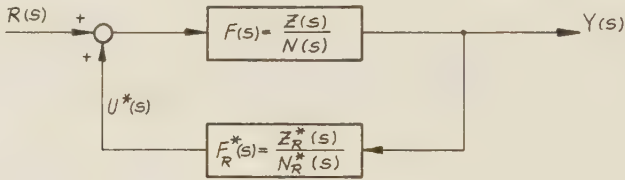


Bild 11.4

Der Zustandsregler mit I-Anteil für eine Strecke dritter Ordnung hat die Übertragungsfunktion

$$F_R^*(s) = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s(s^2 + p_4 s + p_0)} \quad (11.5)$$

Unter den in Kapitel 11.1 getroffenen Einschränkungen besitzt die allgemeine Realisierung dieser Übertragungsfunktion die in Bild 11.5 gezeigte Gestalt.

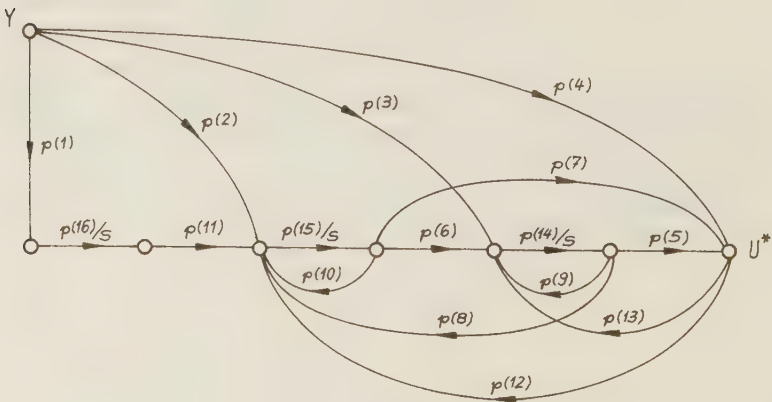


Bild 11.5

Es wird angenommen, daß jede der 16 Zweigverstärkungen $p(i)$ mit einem Fehler von maximal $\kappa\%$ behaftet sein kann. Welchen Wert der i -te Parameter $p(i)$ innerhalb seines Toleranzbandes annimmt, wird durch den i -ten Fehlerindikator $\eta(i)$ angegeben, der alle Werte zwischen +1 und -1 annehmen kann. Der tatsächliche Wert der Zweigverstärkung $p(i)$ berechnet sich somit aus seinem Nominalwert $p^N(i)$ über die Beziehung

$$p(i) = p^N(i) [100 + \kappa \eta(i)] / 100 \quad (11.6)$$

Die Nominalwerte der Integratorverstärkungen betragen $p^N(14) = p^N(15) = p^N(16) = 1$. Die anderen $p^N(i)$ ergeben sich nach Vorgabe von sieben Koeffizienten aus der Bedingung, daß die Übertragungsfunktion des Reglers nach Bild 11.5 für $p(i) = p^N(i)$ mit $F_R^*(s)$ nach Gleichung (11.5) übereinstimmt.

Die Übertragungsfunktion $F_R^*(s) = Y(s)/R(s)$ des Regelkreises nach Bild 11.4 ergibt sich zu

$$F_R^*(s) = \frac{Z(s) N_R^*(s)}{N(s) N_R^*(s) - Z(s) Z_R^*(s)} \quad (11.7)$$

Sie besitzt eine Nullstelle bei $s=0$ und somit verschwindet die bleibende Regelabweichung nach einem Eingangssprung $r(t) = 1(t)$. Bei Fehlern in den Reglerparametern weicht die Übergangsfunktion des Regelkreises von ihrem Nominalverlauf ab. Die Differenz zwischen Ist- und Nominal-Übergangsfunktion verschwindet aber bei stabilen Regelkreisen für $t \rightarrow \infty$, so daß zur Bestimmung der quadratischen Fläche zwischen beiden die in [21] angegebene Formel verwendet werden kann. Für die Ermittlung der kritischen Fehlerschranke κ^* des Zustandsregelkreises nach Bild 11.4 wurde ein Digitalprogramm mit der Bezeichnung HIWOC I erstellt, das denselben Aufbau wie das in Kapitel 10.3 beschriebene Programm HIPWOC besitzt. Es erlaubt analog zum Programm HIPWOC die Anwahl verschiedener Suchalgorithmen zur Bestimmung derjenigen ungünstigsten Fehlerverteilung, für welche sich der Regelkreis beim kleinsten Prozentsatz κ am Stabilitätsrand befindet.

In den folgenden Kapiteln 11.3 und 11.4 sind die kritischen Fehlerschranken für zwei Regelkreise angegeben, bei denen der Zustandsregler mit I-Anteil in den Normalformen BNF^I , RNF^I , SNF^I , $BBNF^I$ und $D2^I$ realisiert wurde.

11.3 BEISPIELE FÜR ZUSTANDSREGLER MIT I-ANTEIL

11.3.1 Der Regelkreis RMI 1

Die Übertragungsfunktion der zu regelnden Strecke besitzt die Form

$$F(s) = \frac{6s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (11.8)$$

Für diese Regelstrecke wird ein Zustandsregler mit I-Anteil gesucht, welcher die Pole der Strecke und den Integratorpol von $s_{1/2}^0 = -1 \pm 3i$, $s_3^0 = -2$ und $s_4^0 = 0$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$, $s_3^g = -4$ und $s_4^g = -3$ verschiebt. Der Beobachter möge einen Doppelpol bei $s = -10$ erhalten.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers lautet (siehe Anhang B1)

$$F_R^*(s) = \frac{-36.50s^3 - 234.67s^2 - 703.33s - 866.67}{s(s^2 + 29.0s + 78.0)} \quad (11.9)$$

Welche Normalform für den vorliegenden Zustandsregler das günstigste Empfindlichkeitsverhalten besitzt, kann anhand der Bedingung (11.4)

$$0.5 \leq \frac{l_n p_0}{l_1} \leq 1.25$$

überprüft werden. Mit den Koeffizienten $l_n = -36.50$, $l_1 = -703.33$ und $p_0 = 78$ ist diese Bedingung nicht erfüllt. Damit kann aufgrund der Überlegungen in Kapitel 11.1 vermutet werden, daß die Realisierung dieses Zustandsreglers in der Normalform BNF^I die größte kritische Fehlerschranke aller betrachteten Normalformen besitzt.

Mit dem Programm HIWOC I wurden die kritischen Fehlerschranken für die Realisierungen des Zustandsreglers nach Gleichung (11.9) in Beobachternormalform BNF^I, in Regelungsnormalform RNF^I, in Steuerbarkeitsnormalform SNF^I, in Beobachtbarkeitsnormalform BBNF^I und in Diagonalform D2^I bestimmt. Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Normalformen, die kritischen Fehlerschranken κ^* und die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind in Anhang B1, Tabelle B.1 zusammengestellt.

In Tabelle 11.1 sind die Ergebnisse für die kritischen Fehlerschranken des Zustandsregelkreises RMI 1 angegeben.

Normalform	krit. Fehlerschranke
B N F ^I	$\kappa^* = 19.26 \%$
R N F ^I	$\kappa^* = 2.416 \%$
S N F ^I	$\kappa^* = 0.5560\%$
B B N F ^I	$\kappa^* = 0.5873\%$
D 2 ^I	$\kappa^* = 3.651 \%$

Tabelle 11.1

Das Verhältnis der kritischen Fehlerschranken von Beobachter-, Regelungs-, Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnormalform entspricht genau der Vermutung über den Zusammenhang zwischen dem Empfindlichkeitsverhalten der Regler-Normalformen mit und ohne I-Anteil. Für die Diagonalform ergibt sich dagegen eine Abweichung gegenüber den bisherigen Ergebnissen.

Obwohl die statische Summenempfindlichkeit der Diagonalform nie kleiner als die der Regelungsnormalform werden kann, besitzt die Normalform $D2^I$ eine größere kritische Fehlerschranke als die Normalform RNF^I . Das dürfte vor allem durch die nachweislich gute Eigenstabilität (Regler ohne Strecke) der Diagonalform bedingt sein.

Bei Zustandsreglern mit I-Anteil, deren Koeffizienten l_3, l_1 und p_0 der Übertragungsfunktion die Bedingung $\frac{l_3 p_0}{l_1} \approx 0.5$ oder $\frac{l_3 p_0}{l_1} \approx 1.25$ erfüllen (das entspricht dem Fall einer etwa gleich großen statischen Summenempfindlichkeit bei Regelungs- und Beobachternormalform), besteht daher die Möglichkeit, daß die Diagonalform $D2^I$ das beste Empfindlichkeitsverhalten aller Normalformen zeigt. Dies ist kein prinzipieller Unterschied gegenüber Zustandsreglern ohne I-Anteil, wo dies ebenfalls auftreten kann.

11.3.2 DER REGELKREIS RMI 2

In diesem Abschnitt wird ein Zustandsregler mit I-Anteil für eine Regelstrecke betrachtet, deren Übertragungsfunktion die Gestalt

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (11.10)$$

besitzt.

Der Zustandsregler mit I-Anteil soll die Pole der Strecke und den Integratorpol von $s_{1/2}^0 = -1 \pm 3i$, $s_3^0 = -2$ und $s_4^0 = 0$ nach $s_{1/2}^g = -3 \pm 2i$, $s_3^g = -4$ und $s_4^g = -3$ verschieben. Der Beobachter möge einen Doppelpol bei $s = -10$ erhalten.

Die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers lautet (siehe Anhang B2)

$$F_R^*(s) = \frac{-20.510s^3 - 177.98s^2 - 627.25s - 866.67}{s(s^2 + 8.4902s + 16.471)} \quad (11.11)$$

Setzt man die Koeffizienten $l_3 = -20.510$, $l_1 = -627.25$ und $p_0 = 16.471$ der Reglerübertragungsfunktion in die Bedingung (11.4) ein, so zeigt sich, daß diese mit

$$\frac{l_3 p_0}{l_1} = 0.536$$

erfüllt ist. Somit besitzt die Regelungsnormalform RNF^I des Zustandsreglers nach Gleichung (11.11) ein günstigeres Empfindlichkeitsverhalten als die Beobachternormalform BNF^I . Da der Wert von $\frac{l_3 p_0}{l_1}$ nahezu 0.5 beträgt, kann geschlossen werden (siehe Kapitel 9.6), daß der Unterschied zwischen beiden im Hinblick auf ihre Empfindlichkeit gering ist.

Mit dem Programm HIWOC I wurden die kritischen Fehlerschranken für die Realisierungen des Zustandsreglers mit I-Anteil in den Normalformen BNF^I , RNF^I , SNF^I , $BBNF^I$ und $D2^I$ bestimmt. Die Koeffizienten $p^n(i)$ der Normalformen, die kritischen Fehlerschranken x^* und die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind im Anhang B2, Tabelle B.2 zusammengestellt.

In Tabelle 11.2 sind die Ergebnisse für die kritischen Fehlerschranken des Regelkreises RMI 2 angegeben.

Normalform	krit. Fehlerschranke
$B N F^I$	$\kappa^* = 21.16 \%$
$R N F^I$	$\kappa^* = 22.03 \%$
$S N F^I$	$\kappa^* = 22.98 \%$
$B B N F^I$	$\kappa^* = 22.32 \%$
$D 2^I$	$\kappa^* = 32.23 \%$

Tabelle 11.2

11.4 DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Die in den Tabellen 11.1 und 11.2 angegebenen kritischen Fehlerschranken der Normalformen für den Zustandsregler mit I-Anteil zeigen folgendes.

- 1.) Die Klassifikation der in Kapitel 11.1 eingeführten Normalformen für den Zustandsregler mit I-Anteil anhand der Bedingung (11.4) ergibt eine gute Übereinstimmung mit den tatsächlich vorhandenen kritischen Fehlerschranken für die Beobachternormalform BNF^I und die Regelungsnormalform RNF^I .
- 2.) Die bekannte gute Eigenstabilität (Regler allein) der Diagonalform kann dazu führen, daß ihre kritische Fehlerschranke höher ist, als aufgrund der statischen Summenempfindlichkeit geschlossen werden kann. Wenn die Koeffizienten l_n , l_1 und p_0 der Reglerübertragungsfunktion $F_R^*(s)$ die Bedingungen

$$\frac{l_n p_0}{l_1} \approx 1.25 \quad \text{oder} \quad \frac{l_n p_0}{l_1} \approx 0.5$$

erfüllen (d.h. die statischen Summenempfindlichkeiten von Beobachter- und Regelungsnormalform sind nahezu gleich groß), kann deshalb die Normalform $D2^I$ das günstigste Empfindlichkeitsverhalten aller Normalformen besitzen.

- 3.) Durch die Vorschaltung des I-Anteils sind die Empfindlichkeits-eigenschaften von Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnormalform nicht mehr identisch. Dies resultiert aus der Tatsache, daß der Integratorzweig bei der Beobachtbarkeitsnormalform $BBNF^I$ nur in einen Vorwärtszweig, bei der Steuerbarkeitsnormalform SNF^I jedoch in zwei Vorwärtszweige eingeht.
- 4.) Wenn die Bedingung (11.4) nicht erfüllt ist, kann mit großer Wahrscheinlichkeit geschlossen werden, daß die Beobachternormalform BNF^I das günstigste Empfindlichkeitsverhalten aller untersuchten Normalformen zeigt.

Ähnlich wie bei Zustandsreglern ohne I-Anteil ist es also möglich, Normalformen für die Realisierung von Zustandsreglern mit I-Anteil anzugeben, die ein günstiges Empfindlichkeitsverhalten im Hinblick auf Fehler in den Reglerkoeffizienten aufweisen.

12 EMPFINDLICHKEITSBETRACHTUNGEN FÜR ZUSTANDSREGLER MIT MEHREREN EINGÄNGEN

Zustandsregler für Strecken mit einem Eingang und einem Ausgang werden durch eine einzige Übertragungsfunktion beschrieben. Aus den Koeffizienten dieser Übertragungsfunktion lassen sich Kriterien dafür ableiten, welche Normalform für die Realisierung des Reglers das günstigste Empfindlichkeitsverhalten aufweist (Kapitel 9).

Zustandsregler für Strecken mit einem Eingang und m Ausgängen werden dagegen durch m Übertragungsfunktionen der Form

$$F_{Ri}(s) = \frac{U(s)}{Y_i(s)} = \frac{l_n^i s^n + \dots + l_1^i s + l_0^i}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0}, \quad (12.1)$$

$i=1,2,\dots,m$

beschrieben. Für jede einzelne Übertragungsfunktion $F_{Ri}(s)$ könnte in gleicher Weise eine günstige Normalform bestimmt werden wie im einläufigen Regelkreis. Eine getrennte Realisierung der einzelnen $F_{Ri}(s)$ würde jedoch die Reglerordnung um den Faktor m erhöhen und somit auch die Zahl der fehlerbehafteten Reglerparameter. Es ist daher günstiger, den Regler in einem einzigen Netzwerk n-ter Ordnung zu realisieren.

Für die gemeinsame Realisierung von mehreren Übertragungsfunktionen $F_{Ri}(s)$ nach Gleichung (12.1) scheiden die Regelungs- und die Steuerbarkeitsnormalform aus, da unterschiedliche Zähler in den $F_{Ri}(s)$ zu widersprüchlichen Forderungen an die Vorwärtzweige in der Realisierung führen. Dadurch bleiben als Normalformen für eine gemeinsame Realisierung nur noch die Beobachternormalform, die Beobachtbarkeitsnormalform und die Diagonalform übrig.

Wenn für keine der m Reglerübertragungsfunktionen $F_{Ri}(s)$ die Bedingung

$$0.5 \leq \frac{l_n^i p_0}{l_0^i} \leq 1.25 \quad (12.2)$$

erfüllt ist, stellt die Beobachternormalform die günstigste Realisierung für alle Einzelübertragungsfunktionen dar. Daher dürfte auch bei einer gemeinsamen Realisierung aller Übertragungsfunktionen des Reglers in einem Netzwerk n -ter Ordnung die Beobachternormalform das günstigste Empfindlichkeitsverhalten aller Normalformen besitzen.

Durch die Bedingung (12.2) wird ein sehr enger Bereich für die Parameter der Reglerübertragungsfunktionen eingegrenzt, der nur in Sonderfällen angenommen wird. Daß die Koeffizienten aller Reglerübertragungsfunktionen $F_{Ri}(s)$ diese Bedingung gleichzeitig erfüllen ist wenig wahrscheinlich. Für diesen Spezialfall besäße die Regelungsnormalform die kleinste statische Summenempfindlichkeit. Da sie aber für eine gemeinsame Realisierung der Reglerübertragungsfunktionen ausscheidet, müßte untersucht werden, welche der drei verbleibenden Normalformen das günstigste Empfindlichkeitsverhalten zeigt.

Da die Diagonalform reelle Reglereigenwerte voraussetzt und die Beobachtbarkeitsnormalform fast immer eine größere statische Summenempfindlichkeit als die Beobachternormalform besitzt, dürfte auch im betrachteten Spezialfall die Beobachternormalform mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die günstigste Realisierung des Zustandsreglers darstellen. Wenn nur für einen Teil der m Reglerübertragungsfunktionen $F_{Ri}(s)$ die Bedingung (12.2) erfüllt ist, gilt dies in verstärktem Maße.

Wird in diesen Fällen eine genauere Aussage über die Empfindlichkeit der Normalformen benötigt, empfiehlt es sich, ihre quadratische Summenempfindlichkeit (Kapitel 13) zu berechnen und anhand dieser Ergebnisse die günstigste Normalform auszuwählen.

13 BESTIMMUNG ALLGEMEINER REGLERSTRUKTUREN MIT GERINGER

EMPFINDLICHKEIT

13.1 Einleitende Bemerkungen

Bei den in der vorliegenden Arbeit angestellten Empfindlichkeitsbetrachtungen wird die Frage untersucht, wie sich Fehler in den Koeffizienten des Zustandsreglers auf sein Verhalten auswirken. Ein Regler wird als umso unempfindlicher bezeichnet, je größer die Fehler in seinen Koeffizienten sein dürfen, ohne daß dadurch eine Instabilität des Regelkreises auftreten kann.

In den vorangehenden Kapiteln wurde gezeigt, daß sich Zustandsregler mit großer kritischer Fehlerschranke durch eine kleine statische Summenempfindlichkeit auszeichnen. Betrachtet man den isolierten Regler, so bewirken Fehler in seinen Koeffizienten eine Abweichung zwischen der Nominal-Übergangsfunktion $u^n(t)$ und der Ist-Übergangsfunktion $u^i(t)$. In Bild 13.1 sind die Nominal-Übergangsfunktion und zwei Ist-Übergangsfunktionen eines Zustandsreglers angegeben.

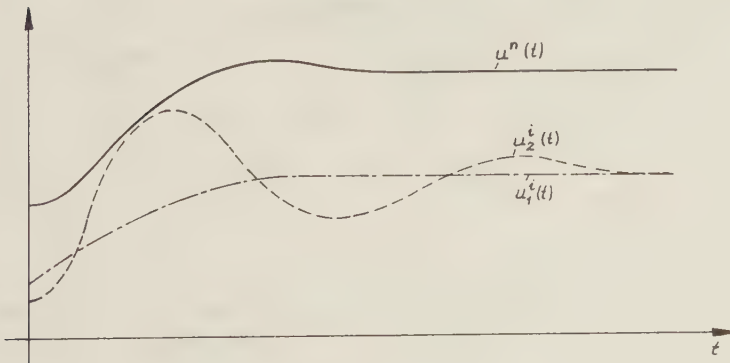


Bild 13.1

Beide Ist-Übergangsfunktionen besitzen dieselbe statische Endabweichung gegenüber der Nominal-Übergangsfunktion. Dennoch beeinflusst

der zweite Parameter, dessen Veränderung auf $u_2^i(t)$ führt, die Dynamik des Reglers und damit des Regelkreises bedeutend stärker als der erste Parameter, durch dessen Veränderung sich $u_1^i(t)$ ergibt.

Die in Kapitel 11 erhaltenen Ergebnisse für den Zusammenhang zwischen statischer Summenempfindlichkeit und kritischer Fehlerschranke dürfen deshalb nicht dazu verleiten, einen exakten Zusammenhang zwischen beiden anzunehmen. Es zeigt sich zwar, daß Regler mit einer großen kritischen Fehlerschranke eine geringe statische Summenempfindlichkeit besitzen. Versucht man aber, durch systematische Veränderung der vorgebbaren Reglerparameter die statische Summenempfindlichkeit zu minimieren, so ergeben sich Reglerstrukturen, die trotz geringer statischer Summenempfindlichkeit eine kleine kritische Fehlerschranke besitzen. Dies läßt den Schluß zu, daß eine systematische Verringerung der statischen Abweichungen unter einen bestimmten Punkt nur auf Kosten der Dynamik möglich ist.

Eine systematische Verringerung der Reglerempfindlichkeit kann nur anhand eines Maßes durchgeführt werden, welches die Dynamik der Zusatzbewegung $[u^i(t) - u^n(t)]$ berücksichtigt. Diese Anforderung erfüllt die im folgenden Abschnitt definierte "quadratische Summenempfindlichkeit" eines Zustandsreglers.

13.2 DEFINITION DER QUADRATISCHEN SUMMENEMPFLINDLICHKEIT

Die folgenden Überlegungen gelten für stabile Zustandsregler ohne I-Anteil. Der Einfachheit halber werden Regler zweiter Ordnung untersucht, deren Übertragungsfunktion die Gestalt

$$F_R^n(s) = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^2 + p_1 s + p_0} \quad (13.1)$$

besitzt. Die Erweiterung der Betrachtungen auf Regler höherer Ordnung ist problemlos, wenn man vom immens steigenden Rechenaufwand absieht. Die allgemeine Minimalrealisierung des Zustandsreglers zweiter Ordnung zeigt Bild 13.2.

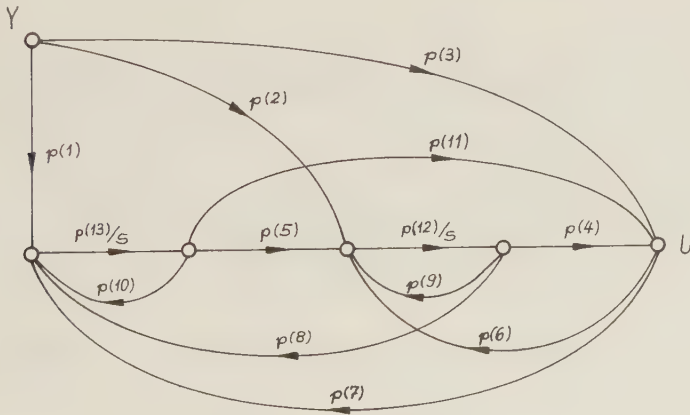


Bild 13.2

Berechnet man die Übertragungsfunktion $F_R^i(s)$ der Realisierung nach Bild 13.2, so ergibt sich

$$F_R^i(s) = \frac{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}{s^2 + \delta s + \epsilon} \quad , \quad (13.2)$$

wobei die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ϵ Funktionen der Reglerparameter

$p(i)$ sind (siehe Kapitel 10.2). Besitzen alle Reglerparameter $p(i)$ ihre Nominalwerte $p^n(i)$, so sind die Übertragungsfunktionen (13.1) und (13.2) identisch.

Nach einem Eingangssprung $y(t) = 1(t)$ und mit $p(i) = p^n(i)$, $i=1,2,\dots,13$ ergibt sich die Nominal-Übergangsfunktion $u^n(t)$ des Zustandsreglers. Die k -te Ist-Übergangsfunktion $u_k^i(t)$ ergibt sich, wenn der k -te Reglerparameter $p(k)$ um 1 % von seinem Nominalwert in der Form

$$p(k) = p^n(k) + 0.01 p^n(k) \quad (13.3)$$

abweicht. Bild 13.3 zeigt die Soll- und die k -te Ist-Übergangsfunktion eines Zustandsreglers.

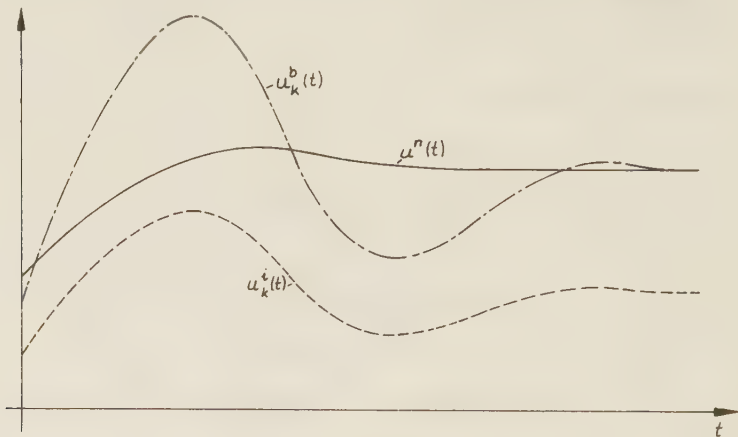


Bild 13.3

Im allgemeinen werden die Endwerte von $u^n(t)$ und $u_k^i(t)$ nicht übereinstimmen. Wählt man bei verändertem k -ten Reglerparameter $p(k)$ den Eingangssprung zu $y(t) = y_0(k) 1(t)$, so ergibt sich bei passendem $y_0(k)$ die in Bild 13.3 strichpunktiert eingezeichnete "bereinigte k -te Sprungantwort" $u_k^b(t)$, deren Endwert für $t \rightarrow \infty$ mit dem Endwert der Nominal-Übergangsfunktion $u^n(t)$ übereinstimmt.

Die quadratische Empfindlichkeit QE_k des Reglers bezüglich eines Parameters $p(k)$ wird definiert als die quadratische Fläche zwischen der

Nominal-Übergangsfunktion $u^n(t)$ und der bereinigten k-ten Sprungantwort $u_k^b(t)$, die durch eine einprozentige Variation des k-ten Reglerparameters gemäß Gleichung (13.3) entsteht. Es gilt folglich

$$QE_k = \int_0^{\infty} \left[u_k^b(t) - u^n(t) \right]^2 dt \quad . \quad (13.4)$$

Die quadratische Empfindlichkeit QE_k stellt ein Maß für den Einfluß einer einprozentigen Veränderung des k-ten Reglerparameters $p(k)$ von seinem Nominalwert $p^n(k)$ auf die Dynamik des Zustandsreglers dar.

Der Einfluß der Variation aller 13 Parameter kann über die "quadratische Summenempfindlichkeit SQ" berücksichtigt werden, die als Summe über alle Einzelempfindlichkeiten definiert ist. Es ergibt sich

$$SQ = \sum_{k=1}^{13} QE_k \quad . \quad (13.5)$$

Die quadratische Summenempfindlichkeit SQ stellt ein schärferes Maß für die kritische Fehlerschranke einer Reglerrealisierung dar als die statische Summenempfindlichkeit. Wegen der Komplexität der Ausdrücke für die QE_k erscheint es jedoch aussichtslos, allgemeine Aussagen über die quadratische Summenempfindlichkeit verschiedener Regler-Normalformen zu machen. Statt dessen eignet sich die quadratische Summenempfindlichkeit sehr gut für numerische Untersuchungen zur Bestimmung von Reglern mit großer kritischer Fehlerschranke.

13.3 MINIMIERUNG DER REGLEREMPFINDLICHKEIT

Die Koeffizienten der Realisierung eines Zustandsreglers nach Bild 13.2 ergeben sich, wie in Kapitel 10.2 gezeigt, nach Vorgabe von sechs Zweigverstärkungen $p^n(i)$. Damit ist auch die quadratische Summenempfindlichkeit des Zustandsreglers eine Funktion dieser sechs Verstärkungsfaktoren. Über eine Minimierung der quadratischen Summenempfindlichkeit in Abhängigkeit der freien Parameter lassen sich Reglerrealisierungen erzeugen, die eine höhere kritische Fehlerschranke besitzen als die in Kapitel 11 betrachteten Regler-Normalformen.

Für die Optimierung der quadratischen Summenempfindlichkeit eines Zustandsreglers wurde ein Digitalprogramm verwendet, das auf dem in [20] beschriebenen Verfahren basiert und die Minimierung eines Funktionals von n Variablen erlaubt. Aufgrund der Abhängigkeit von sechs Parametern existieren mehrere relative Minima für die quadratische Summenempfindlichkeit SQ . Welches dieser Minima angelaufen wird, hängt von der Wahl des Startwertes ab. Je ungünstiger der Startwert für die Optimierung gewählt wird, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein Nebenminimum angelaufen wird, zu dem eine relativ geringe kritische Fehlerschranke x^* gehört.

Da die vorangegangenen Empfindlichkeitsuntersuchungen zeigten, daß sich unempfindliche Zustandsregler durch eine geringe statische Summenempfindlichkeit auszeichnen, liegt es nahe, als Startwert für die Optimierung die Regler-Normalform mit der kleinsten statischen Summenempfindlichkeit zu wählen. Auf diese Weise entstehen Zustandsregler mit kleiner statischer und quadratischer Summenempfindlichkeit, was zu einem guten Empfindlichkeitsverhalten im Regelkreis führt.

Für die Regelkreise ROI 1 bis ROI 4 wurden Reglerrealisierungen mit minimaler quadratischer Summenempfindlichkeit bestimmt. Als Startwert diente dabei die jeweils beste Normalform; bei den Regelkreisen ROI 1, ROI 3 und ROI 4 also die Beobachternormalform und beim Regelkreis ROI 2 die Regelungsnormalform.

Die Koeffizienten der optimierten Regler (OPT) sind in Tabelle C.1 im Anhang C angegeben. Die Berechnung der kritischen Fehlerschranke für diese Realisierungen wurde mit dem Digitalprogramm HIPWOC (Kapitel 10.3) durchgeführt.

Die kritischen Fehlerschranken κ^* und die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind ebenfalls in Tabelle C.1 eingetragen.

Tabelle 13.1 zeigt einen Vergleich zwischen den als Startwert gewählten Regler-Normalformen und den optimierten Reglern (OPT) für die Regelkreise ROI 1 bis ROI 4. Angegeben sind die statische und die quadratische Summenempfindlichkeit sowie die kritischen Fehlerschranken κ^* der verschiedenen Realisierungen.

	Realisierung	statische Summenempf. SE	quadratische Summenempf. SQ	kritische Fehlerschranke κ^*
ROI 1	B N F	8.493	0.00774	35.19 %
	O P T	14.64	0.00210	51.36 %
ROI 2	R N F	13.46	0.000879	68.81 %
	O P T	14.27	0.000578	70.24 %
ROI 3	B N F	11.00	1.035	16.59 %
	O P T	19.35	0.457	17.20 %
ROI 4	B N F	9.800	0.00868	44.97 %
	O P T	16.05	0.00154	67.41 %

Tabelle 13.1

Die kritischen Fehlerschranken der optimierten Reglerrealisierungen liegen bei den vier Regelkreisen über denen der günstigsten Normalformen. Die Minimierung der quadratischen Summenempfindlichkeit von der Normalform mit kleinster statischer Summenempfindlichkeit aus stellt also einen geeigneten Weg zur Reduzierung der Reglerempfindlichkeit dar. Die Ergebnisse in Tabelle 13.1 zeigen weiterhin, daß Reglerrealisierungen mit günstigem Empfindlichkeitsverhalten

eine kleine statische Summenempfindlichkeit besitzen, daß diese bei den optimierten Realisierungen jedoch größer sein kann als bei der günstigsten Normalform.

Besitzen zwei Reglerrealisierungen nur leicht unterschiedliche statische Summenempfindlichkeiten, kann also nicht mit Sicherheit geschlossen werden, daß zur Realisierung mit kleinster statischer Summenempfindlichkeit die größte kritische Fehlerschranke gehört. In diesen Fällen empfiehlt sich ein Vergleich der quadratischen Summenempfindlichkeiten, die ein schärferes Maß für die kritischen Fehlerschranken darstellen.

Bei instabilen Zustandsreglern und Zustandsreglern mit I-Anteil ist es nicht möglich, die quadratische Summenempfindlichkeit über die Fläche zwischen der Nominal-Übergangsfunktion und der um den Endwert bereinigten Ist-Übergangsfunktion des Reglers zu definieren. Statt dessen könnte man für diese Regler eine quadratische Summenempfindlichkeit über das Ausgangssignal der geregelten Strecke definieren und versuchen, diese in Abhängigkeit der vorgebbaren Reglerparameter zu minimieren.

Für eine systematische Verringerung der Empfindlichkeit des Zustandsreglers mit I-Anteil stehen die bei der Definition der Normalformen in Kapitel 11.1 vernachlässigten Freiheitsgrade zur Verfügung, so daß für den in Bild 11.1 gezeigten Regler die quadratische Summenempfindlichkeit eine Funktion von neun Variablen ist. Die Minimierung der Reglerempfindlichkeit müßte somit in neun Richtungen erfolgen, und zwar für den Regelkreis sechster Ordnung. Der Rechenaufwand, der schon bei der Optimierung des Zustandsreglers ohne I-Anteil (Suche in sechs Richtungen bei einem System zweiter Ordnung) beträchtlich ist, würde sich dabei um ein Mehrfaches erhöhen.

ANHANG A ZUSTANDSREGELKREISE MIT STRECKEN DRITTER ORDNUNG

A1 Der Regelkreis ROI 1

Die Übertragungsfunktion der betrachteten Regelstrecke lautet

$$F(s) = \frac{6s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad . \quad (A.1)$$

Durch einen Zustandsregler sollen die Pole der Strecke von $s_{1,2}^0 = -1 \pm 3i$ und $s_3^0 = -2$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ verschoben werden. Der notwendige Beobachter möge einen Doppelpol bei $s = -10$ besitzen.

In Kapitel 7 wurde die Übertragungsfunktion des gesuchten Zustandsreglers berechnet und es ergab sich

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-\frac{1073}{39}s^2 - \frac{4531}{39}s - \frac{8930}{39}}{s^2 + 26s + \frac{701}{13}} \quad . \quad (A.2)$$

Bild A.1 zeigt ein Blockschaltbild des Zustandsregelkreises.

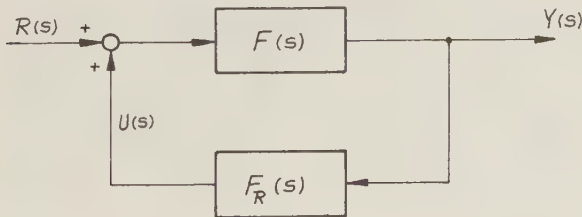


Bild A.1

Für die Realisierung der Reglerübertragungsfunktion (A.2) existiert eine Reihe von Normalformen, deren Empfindlichkeitseigenschaften untersucht werden. Diese Normalformen stellen Sonderfälle der in Bild A.2 dargestellten allgemeinen Minimalrealisierung für einen Regler zweiter Ordnung dar. Die Nominalwerte $p^n(12)$ und $p^n(13)$ der Integratorverstärkungen besitzen dabei den Wert eins.

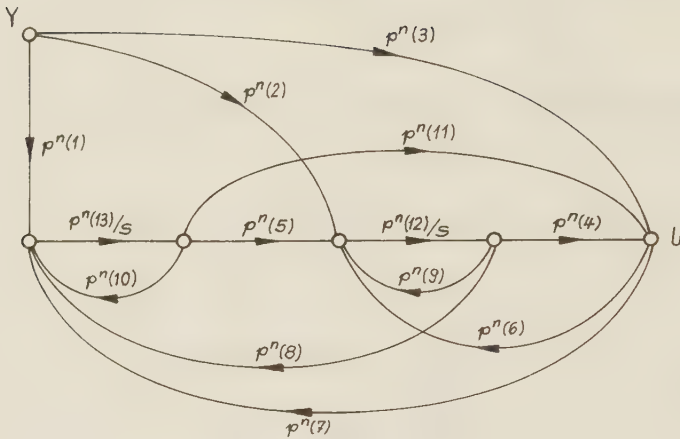


Bild A.2

In Tabelle A.1 sind die Nominalwerte $p^n(i)$ der Koeffizienten für die Realisierung der Reglerübertragungsfunktion (A.2) in Beobachternormalform (BNF), Regelungsnormalform (RNF), Steuerbarkeitsnormalform (SNF), Beobachtbarkeitsnormalform (BBNF) und Diagonalform (D2) angegeben. Daneben stehen die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$, für die sich der Regelkreis ROI 1 bei einer Fehlerschranke $\chi = \chi^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis R011

BNF		RMF		D2		SNF		BBNF		
i	$p^n(i)$	$\tilde{n}^*(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}^*(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}^*(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}^*(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}^*(i)$
1	-223.9743590	1.	1.0	1.	604.142975830	1.	1.0	1.	-14323.398420	-1.
2	-116.17948720	-1.	0.	-	-4.98912977104	-1.	0.	-	599.153846059	1.
3	-27.512820510	-1.	-27.512820510	-1.	-27.512820510	-1.	-27.512820510	-1.	-27.512820510	-1.
4	1.0	1.	1254.6015764	-1.	1.0	-1.	-14323.398420	-1.	1.0	1.
5	1.0	1.	1.0	1.	0.	-	1.0	-1.	1.0	-1.
6	-26.0	1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
7	-53.923076920	-1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
8	0.	-	-53.923076920	1.	0.	-	-53.923076920	-1.	-53.923076920	-1.
9	0.	-	0.	-	-2.27260874769	1.	-26.0	1.	0	-
10	0.	-	-26.0	-1.	-23.7273912523	-1.	0.	-	-26.0	1.
11	0.	-	599.153846059	1.	1.0	1.	599.153846059	1.	0.	-
12	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.
13	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	1.
$\kappa^* = 35.19\%$		$\kappa^* = 5.147\%$		$\kappa^* = 4.655\%$		$\kappa^* = .4385\%$		$\kappa^* = .4385\%$		

Tabelle A.1

A2 DER REGELKREIS ROI 2

Untersucht wird die Regelung einer Strecke dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 1.4s^2 + 1.44s + 1.04} \quad (A.3)$$

Durch einen Zustandsregler sollen die Pole dieser Strecke von $s_{1,2}^0 = -0.2 \pm i$ und $s_3^0 = -1$ nach $s_{1,2}^g = -2 \pm 2i$ und $s_3^g = -3$ geschoben werden. Die Pole des Beobachters mögen bei $s = -5$ liegen.

Mit der Übertragungsfunktion (A.3) der Strecke, dem charakteristischen Polynom $\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = s^3 + 7s^2 + 20s + 24$ (A.4)

der geregelten Strecke und dem charakteristischen Polynom

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}) = s^2 + 10s + 25 \quad (A.5)$$

des Beobachters erhält die Reglerentwurfsgleichung (3.14) die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1.44 & 1.4 & 5 & 4 & 1 \\ 1.04 & 1.44 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1.04 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ p_0 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.6 \\ 113.56 \\ 397.96 \\ 740 \\ 600 \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

Als Lösung des Gleichungssystems (A.6) ergeben sich die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion zu

$$p_1 = 3.44756045268, \quad p_0 = 10.0645020701, \\ l_2 = -12.1524818349, \quad l_1 = -50.0590641739, \quad l_0 = -117.906583547.$$

Die Nominalwerte der Koeffizienten für die Realisierung der Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s^2 + p_1 s + p_0}$$

in Beobachter-, Regelungs-, Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnormalform sind in Tabelle A.2 angegeben. Eine Realisierung des Reglers in Diagonalform scheidet aus, da die Reglerpole konjugiertkomplex sind. Neben den Reglerparametern $p^n(i)$ sind in Tabelle A.2 die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ angegeben, für die sich der Regelkreis ROI 2 für $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis R012

BNF			RNF		SNF		BBNF	
i	$p^n(i)$	$n^*(i)$	$p^n(i)$	$n^*(i)$	$p^n(i)$	$n^*(i)$	$p^n(i)$	$n^*(i)$
1	-117.906583547	1.	1.0	1.	1.0	1.	32.5433188432	1.
2	-50.0590641739	-1.	0.	-	0.	-	-8.16264839798	-1.
3	-12.1524818349	-1.	-12.1524818349	-1.	-12.1524818349	-1.	-12.1524818349	-1.
4	1.0	-1.	4.40209503719	1.	32.5433188432	1.	1.0	1.
5	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	1.
6	-3.44756045268	-1.	0.	-	0.	-	0.	-
7	-10.0645020701	-1.	0.	-	0.	-	0.	-
8	0.	-	-10.0645020701	-1.	-10.0645020701	-1.	-10.0645020701	-1.
9	0.	-	0.	-	-3.44756045268	-1.	0.	-
10	0.	-	-3.44756045268	1.	0.	-	-3.44756045268	-1.
11	0.	-	-8.16264839798	1.	-8.16264839798	-1.	0.	-
12	1.0	.16	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.
13	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.
$\kappa^* = 38.53\%$			$\kappa^* = 68.81\%$		$\kappa^* = 36.98\%$		$\kappa^* = 36.98\%$	

Tabelle A.2

A3 DER REGELKREIS ROI 3

Betrachtet wird die Zustandsregelung einer Strecke, deren Verhalten durch die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 1.4 s^2 + 1.44 s + 1.04} \quad (\text{A.7})$$

beschrieben wird. Die Pole dieser Strecke sollen durch den Regler von $s_{1,2}^0 = -0.2 \pm i$ und $s_3^0 = -1$ nach $s_{1,2}^g = -2 \pm 2i$ und $s_3^g = -3$ geschoben werden. Die Pole des Beobachters mögen bei $s = -5$ liegen.

Die Bestimmungsgrößen für den gesuchten Zustandsregler sind die Übertragungsfunktion (A.7) der Strecke und die charakteristischen

Polynome $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = s^3 + 7 s^2 + 20 s + 24 \quad (\text{A.8})$

der geregelten Strecke und

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = s^2 + 10 s + 25 \quad (\text{A.9})$$

des Beobachters. Mit diesen Vorgaben lautet die Reglerentwurfsgleichung (3.14)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.44 & 1.4 & 1 & 0 & 0 \\ 1.04 & 1.44 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1.04 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ p_0 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.6 \\ 113.56 \\ 397.96 \\ 740 \\ 600 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Als Lösung des Gleichungssystems (A.10) ergeben sich die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion zu

$$p_1 = 15.6001386242, \quad p_0 = 91.7198806101, \\ l_2 = -247.088134216, \quad l_1 = -591.699229127, \quad l_0 = -504.611327171.$$

Die Nominalwerte $p^n(i)$ der Koeffizienten für die Realisierung des Reglers in den Normalformen BNF, RNF, SNF und BBNF sind in Tabelle A.3 angegeben. Eine Realisierung des Reglers in Diagonalform scheidet aus, da die Reglerpole konjugiertkomplex sind. Neben den Reglerparametern $p^n(i)$ sind in Tabelle A.3 die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ angegeben, für die sich der Regelkreis ROI 3 für $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis ROI3

BNF			RNF		SNF		BBNF	
i	$p^n(i)$	$\eta^*(i)$	$p^n(i)$	$\eta^*(i)$	$p^n(i)$	$\eta^*(i)$	$p^n(i)$	$\eta^*(i)$
1	-504.611327171	1.	1.0	1.	1.0	1.	-28743.5641807	-1.
2	-591.699229127	1.	0.	-	0.	-	3262.90991702	1.
3	-247.088134216	-1.	-247.088134216	-1.	-247.088134216	-1.	-247.088134216	-1.
4	1.0	1.	22158.2828431	1.	-28743.5641807	-1.	1.0	1.
5	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.
6	-15.6001386242	1.	0.	-	0.	-	0.	-
7	-91.7198806101	-1.	0.	-	0.	-	0.	-
8	0.	-	-91.7198806101	-1.	-91.7198806101	-1.	-91.7198806101	-1.
9	0.	-	0.	-	-15.6001386242	1.	0.	-
10	0.	-	-15.6001386242	1.	0.	-	-15.6001386242	1.
11	0.	-	3262.90991702	-1.	3262.90991702	1.	0.	-
12	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	-1.
13	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	1.
$\kappa^* = 16.59\%$			$\kappa^* = .6686\%$		$\kappa^* = .2400\%$		$\kappa^* = .2400\%$	

Tabelle A.3

A4 DER REGELKREIS ROI 4

Die Strecke des betrachteten Regelkreises wird durch die Übertragungsfunktion

$$\bar{F}(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \quad (\text{A.11})$$

beschrieben. Die Pole dieser Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_1^0 = -1$, $s_2^0 = -2$ und $s_3^0 = -4$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ geschoben werden. Der Beobachter möge einen Doppelpol bei $s = -5$ erhalten.

Mit der Übertragungsfunktion (A.11) der Strecke und den charakteristischen Polynomen

$$\det(s\underline{I} - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = s^3 + 10s^2 + 37s + 52 \quad (\text{A.12})$$

der geregelten Strecke und

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}) = s^2 + 10s + 25 \quad (\text{A.13})$$

des Beobachters ergibt sich die Reglerentwurfsgleichung (3.14) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 148 \\ 664 \\ 1445 \\ 1300 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Das Gleichungssystem (A.14) besitzt die Lösung

$$p_1 = 13, \quad p_0 = 40, \quad l_2 = -17, \quad l_1 = -117, \quad l_0 = -196.$$

Die Nominalwerte der Koeffizienten für die Realisierung des Reglers in den fünf Normalformen BNF, RNF, SNF, BBNF und D2 sind in Tabelle A.4 angegeben. Daneben stehen die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$, für die sich der Regelkreis ROI 4 bei einer Fehlerschranke $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis R0I4

BNF		RNF		D2		SNF		BBNF		
i	$p^n(i)$	$\hat{n}(i)$	$p^n(i)$	$\hat{n}(i)$	$p^n(i)$	$\hat{n}(i)$	$p^n(i)$	$\hat{n}(i)$	$p^n(i)$	$\hat{n}(i)$
1	-196.0	1.	1.0	1.	-12.0	-1.	1.0	1.	-868.0	-1.
2	-117.0	1.	0.	-	116.0	1.	0.	-	104.0	1.
3	-17.0	-1.	-17.0	-1.	-17.0	-1.	-17.0	-1.	-17.0	-1.
4	1.0	-1.	484.0	1.	1.0	1.	-868.0	-1.	1.0	1.
5	1.0	1.	1.0	-1.	0.	-	1.0	-1.	1.0	-1.
6	-13.0	-1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
7	-40.0	-1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
8	0.	-	-40.0	-1.	0.	-	-40.0	-1.	-40.0	-1.
9	0.	-	0.	-	-8.0	-1.	-13.0	1.	0.	-
10	0.	-	-13.0	1.	-5.0	1.	0.	-	-13.0	1.
11	0.	-	104.0	-1.	1.0	-1.	104.0	1.	0.	-
12	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	-1.
13	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	1.
$\kappa^* = 44.97\%$		$\kappa^* = 10.96\%$		$\kappa^* = 8.951\%$		$\kappa^* = 3.613\%$		$\kappa^* = 3.613\%$		

Tabelle A.4

A5 DER REGELKREIS ROI 5

Die zu regelnde Strecke besitzt die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (A.15)$$

Die Pole dieser Strecke sollen durch einen Zustandsregler von $s_{1,2}^0 = -1 \pm 3i$ und $s_3^0 = -2$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$ und $s_3^g = -4$ geschoben werden. Der Beobachter möge einen Doppelpol bei $s = -10$ erhalten.

Aus der Übertragungsfunktion (A.15) der Strecke und den charakteristischen Polynomen

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = s^3 + 10s^2 + 37s + 52 \quad (A.16)$$

der geregelten Strecke und

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = s^2 + 20s + 100 \quad (A.17)$$

des Beobachters ergibt sich die Reglerentwurfsgleichung (3.14) zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 14 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ 20 & 14 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 323 \\ 1772 \\ 4740 \\ 5200 \end{pmatrix} \quad (A.18)$$

Das Gleichungssystem (A.18) besitzt die Lösungen

$$p_1 = -8.35291139284, \quad p_0 = 49.7059456309$$

$$l_2 = -34.3529113928, \quad l_1 = -169.294054369, \quad l_0 = -841.176200866.$$

Der Zustandsregler ist also instabil.

Die Nominalwerte der Koeffizienten für die Realisierung des Reglers in den vier Normalformen BNF, RNF, SNF und BBNF sind in Tabelle A.5 angegeben. Eine Realisierung des Reglers in Diagonalform scheidet aus, da die Reglerpole konjugiertkomplex sind. Neben den Reglerparametern $p^n(i)$ sind in Tabelle A.5 die zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ angegeben, für die sich der Regelkreis ROI 5 für $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis ROI 5

BNF		RNF		SNF		BBNF		
i	$p^n(i)$	$\tilde{n}(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}(i)$	$p^n(i)$	$\tilde{n}(i)$
1	-841.176200866	1.	1.0	-1.	1.0	1.	-2944.57189365	-1.
2	-169.294054369	-1.	0.	-	0.	-	-456.240879319	1.
3	-34.3529113928	-1.	-34.3529113928	1.	-34.3529113928	-1.	-34.3529113928	-1.
4	1.0	1.	866.367745087	-1.	-2944.57189365	-1.	1.0	1.
5	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.
6	8.35291139284	1.	0.	-	0.	-	0.	-
7	-49.7059456309	-1.	0.	-	0.	-	0.	-
8	0.	-	-49.7059456309	-1.	-49.7059456309	-1.	-49.7059456309	-1.
9	0.	-	0.	-	8.35291139284	1.	0.	-
10	0.	-	8.35291139284	1.	0.	-	8.35291139284	1.
11	0.	-	-456.240879319	-1.	-456.240879319	1.	0.	-
12	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	1.
13	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.
$\kappa^* = 26.24\%$		$\kappa^* = 11.52\%$		$\kappa^* = 5.106\%$		$\kappa^* = 5.106\%$		

Tabelle A.5

ANHANG B ZUSTANDSREGELKREISE MIT I-ANTEIL

B1 DER REGELKREIS RMI 1

Die Übertragungsfunktion der betrachteten Strecke lautet

$$F(s) = \frac{6s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (B.1)$$

Für diese Strecke wird ein Zustandsregler mit I-Anteil konstruiert, welcher die Streckenpole und den Integratorpol von $s_{1,2}^0 = -1 \pm 3i$, $s_3^0 = -2$ und $s_4^0 = 0$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$, $s_3^g = -4$ und $s_4^g = -3$ verschiebt. Der Beobachter soll einen Doppelpol bei $s = -10$ erhalten.

Mit der Übertragungsfunktion (B.1) der Strecke und den charakteristischen Polynomen

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}^* - \underline{b}_1 \underline{k}^* \underline{k}^T) = s^4 + 13s^3 + 67s^2 + 163s + 156 \quad (B.2)$$

der geregelten Strecke und

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}^*) = s^2 + 20s + 100 \quad (B.3)$$

des Beobachters ergibt sich die Entwurfsgleichung (6.16) des Zustandsreglers mit I-Anteil zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 18 & 6 & 0 & 0 \\ 20 & 14 & 0 & 18 & 6 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -l_3 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 413 \\ 2783 \\ 10116 \\ 19420 \\ 15600 \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (B.4) lautet

$$\begin{aligned} p_1 &= 29.0 \\ p_0 &= 78.000 \, 091 \, 641 \, 6 \\ l_3 &= -36.499 \, 984 \, 726 \, 3 \\ l_2 &= -234.666 \, 651 \, 234 \\ l_1 &= -703.333 \, 165 \, 959 \\ l_0 &= -866.666 \, 666 \, 030 \end{aligned}$$

Für die Realisierung der Reglerübertragungsfunktion

$$F_R^*(s) = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{s(s^2 + p_1 s + p_0)} \quad (\text{B.5})$$

wurden fünf Normalformen definiert. Sie ergeben sich als Sonderfälle der in Bild B.1 dargestellten Realisierung.

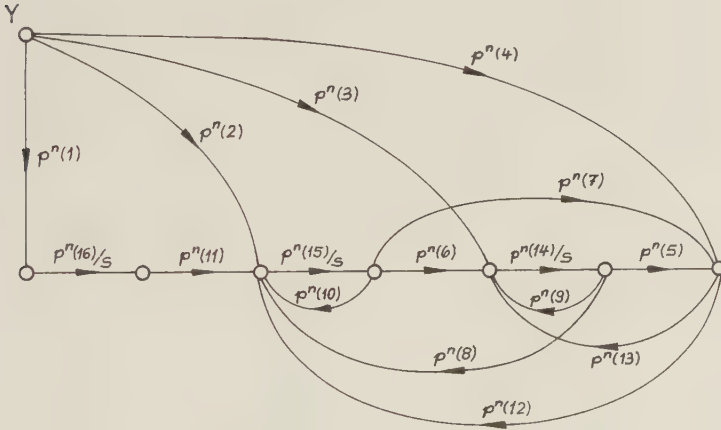


Bild B.1

In Tabelle B.1 sind die Koeffizienten $p^n(i)$ für die Realisierung des Zustandsreglers mit I-Anteil in Beobachternormalform BNF^I , in Regulationsnormalform RNF^I , in Steuerbarkeitsnormalform SNF^I , in Beobachtbarkeitsnormalform BBNF^I und in Diagonalform D2^I angegeben. Daneben stehen die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$, für die sich der Regelkreis RMI1 bei einer Fehlerschranke $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis RMI1

BNF ^I		RNF ^I		D2 ^I		SNF ^I		BBNF ^I		
i	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)
1	-866.666666030	1.	2.95774212739	1.	-288.888504992	1.	-.355674435693	-1.	-866.666666030	1.
2	-703.333165959	-1.	1.0	1.	825.526145867	1.	1.0	1.	-21747.4852814	-1.
3	-234.666651234	-1.	0.	-	-1.69324003792	-1.	0.	-	823.832905829	1.
4	-36.4999847263	1.	-36.4999847263	-1.	-36.4999847263	-1.	-36.4999847263	-1.	-36.4999847263	-1.
5	1.0	-1.	-293.016303891	1.	1.0	-1.	-21454.4689775	-1.	1.0	1.
6	1.0	1.	1.0	-1.	0.	-	1.0	-1.	1.0	-1.
7	0.	-	823.832905829	1.	1.0	1.	823.832905829	1.	0.	-
8	0.	-	-78.0000916416	-1.	0.	-	-78.0000916416	-1.	-78.0000916416	-1.
9	0.	-	0.	-	-3.00000398442	-1.	-29.0	1.	0.	-
10	0.	-	-29.0	-1.	-25.9999960156	-1.	0.	-	-29.0	1.
11	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.
12	-78.0000916416	-1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
13	-29.0	1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
14	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	-1.	1.0	1.
15	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.
16	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.
$\kappa^* = 19.26\%$		$\kappa^* = 2.416\%$		$\kappa^* = 3.651\%$		$\kappa^* = .5560\%$		$\kappa^* = .5873\%$		

Tabelle B.1

B2 DER REGELKREIS RMI 2

Die Strecke des betrachteten Regelkreises besitzt die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 18}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} \quad (B.6)$$

Für diese Strecke wird ein Zustandsregler mit I-Anteil konstruiert, welcher die Streckenpole und den Integratorpol von $s_{1,2}^0 = -1 \pm 3i$, $s_3^0 = -2$ und $s_4^0 = 0$ nach $s_{1,2}^g = -3 \pm 2i$, $s_3^g = -4$ und $s_4^g = -3$ verschiebt. Der Beobachter soll einen Doppelpol bei $s = -10$ erhalten.

Mit der Übertragungsfunktion (B.6) der Strecke und den charakteristischen Polynomen

$$\det(sI - \underline{A}^* - \underline{b}_1 \underline{k}^{*T}) = s^4 + 13s^3 + 67s^2 + 163s + 156 \quad (B.7)$$

der geregelten Strecke und

$$\det(sI - \underline{F}^*) = s^2 + 20s + 100 \quad (B.8)$$

des Beobachters lautet die Entwurfsgleichung (6.16) des Zustandsreglers mit I-Anteil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 18 & 9 & 1 & 0 \\ 20 & 14 & 0 & 18 & 9 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ -l_3 \\ -l_2 \\ -l_1 \\ -l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 413 \\ 2783 \\ 10116 \\ 19420 \\ 15600 \end{pmatrix} \quad (B.9)$$

Als Lösung des Gleichungssystems (B.9) ergeben sich die Koeffizienten der Reglerübertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} p_1 &= 8.490\,216\,379\,10 & p_0 &= 16.470\,716\,570\,1 \\ l_3 &= -20.509\,783\,620\,8 & l_2 &= -177.980\,365\,325 \\ l_1 &= -627.254\,711\,307 & l_0 &= -866.666\,666\,030 \end{aligned}$$

Die Nominalwerte $p^n(i)$ der Koeffizienten für die Realisierung des Reglers in den Normalformen BNF^I , RNF^I , SNF^I , $BBNF^I$ und $D2^I$ sind in Tabelle B.2 angegeben. Daneben stehen die ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$, für die sich der Regelkreis RMI2 bei einer Fehler-schranke $\kappa = \kappa^*$ am Stabilitätsrand befindet.

Regelkreis RMI2

BNF ^I		RNF ^I		D2 ^I		SNF ^I		BBNF ^I		
i	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)	p ⁿ (i)	n [*] (i)
1	-866.666666030	1.	72.0979642496	1.	-288.886281055	1.	3.12398774089	1.	-866.666666030	1.
2	-627.254711307	-1.	1.0	-1.	-8.25966557314	-1.	1.0	-1.	-256.774676207	-1.
3	-177.980365325	-1.	0.	-	4.41180107726	1.	0.	-	-3.84786449589	-1.
4	-20.5097836208	1.	-20.5097836208	-1.	-20.5097836208	-1.	-20.5097836208	-1.	-20.5097836208	-1.
5	1.0	-1.	-12.0206815137	1.	1.0	1.	-244.753994693	1.	1.0	1.
6	1.0	1.	1.0	1.	0.	-	1.0	1.	1.0	1.
7	0.	-	-3.84786449589	-1.	1.0	1.	-3.84786449589	-1.	0.	-
8	0.	-	-16.4707165701	-1.	0.	-	-16.4707165701	-1.	-16.4707165701	-1.
9	0.	-	0.	-	-3.00002707939	.88	-8.49021637910	-1.	0.	-
10	0.	-	-8.49021637910	-1.	-5.49018929971	-1.	0.	-	-8.49021637910	-1.
11	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.
12	-16.4707165701	-1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
13	-8.49021637910	1.	0.	-	0.	-	0.	-	0.	-
14	1.0	-1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	1.
15	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	.8	1.0	1.	1.0	-1.
16	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.	1.0	1.
$\kappa^* = 21.16\%$		$\kappa^* = 22.03\%$		$\kappa^* = 32.23\%$		$\kappa^* = 22.98\%$		$\kappa^* = 22.32\%$		

Tabelle B.2

ANHANG C OPTIMIERTE ZUSTANDSREGLER

Mit einem Digitalprogramm zur Minimierung eines Funktionals von n Variablen wurden die Zustandsregler der Regelkreise ROI 1 bis ROI 4 optimiert. Ausgehend von der Normalform mit kleinster statischer Summenempfindlichkeit wurden die sechs vorgebbaren Reglerparameter bis zum Erreichen eines Minimums für die quadratische Summenempfindlichkeit variiert. Die Ergebnisse der Optimierung sind in Tabelle C.1 für die Regelkreise ROI 1 bis ROI 4 angegeben.

Die kritischen Fehlerschranken für die optimierten Regler wurden mit dem Programm HIPWOC (Kapitel 10.3) bestimmt. Die Werte für κ^* mit den zugehörigen ungünstigsten Fehlerindikatoren $\eta^*(i)$ sind ebenfalls in Tabelle C.1 angegeben. Die Bezifferung der Reglerparameter $p^n(i)$ entspricht derjenigen in Anhang A, bzw. der in Bild 13.2 angegebenen.

Optimierte Regler (OPT)

ROI 1		ROI 2		ROI 3		ROI 4		
i	$p^n(i)$	$\kappa^n(i)$	$p^n(i)$	$\kappa^n(i)$	$p^n(i)$	$\kappa^n(i)$	$p^n(i)$	$\kappa^n(i)$
1	-19.6866960798	-1.	.128282187718	-1.	-123.412902352	1.	-7.42384470122	-1.
2	-33.5352218382	1.	-.0038083674106	1.	-61.8990023281	1.	-7.15403071548	1.
3	-27.512820510	-1.	-12.1524818349	-1.	-247.088134216	1.	-17.0	-1.
4	.809040	-1.	29.9870	-1.	1.55580	-1.	1.09390	-1.
5	1.06620	-.62	.651330	1.	.650910	-1.	.926460	-1.
6	-29.2884360623	-1.	-.001297007463	-1.	-2.57664574879	-1.	-3.21151866970	1.
7	-16.2286774277	1.	-.012653434514	1.	-72.6866202426	-1.	-10.5985203647	-1.
8	-3.54810	1.	-11.2040	1.	-1.42870	-1.	-1.28650	1.
9	-2.04060	-1.	-.733340	-1.	-1.67580	1.	-4.29340	-1.
10	-1.2390	-1.	-3.05760	-1.	-.262810	1.	-1.99690	-1.
11	-.0600860	1.	-30.2110	1.	.13280	-1.	.301610	1.
12	1.0	-1.	1.0	.5	1.0	-1.	1.0	-1.
13	1.0	1.	1.0	1.	1.0	-1.	1.0	-1.
$\kappa^* = 51.36\%$		$\kappa^* = 70.24\%$		$\kappa^* = 17.20\%$		$\kappa^* = 67.41\%$		

Tabelle C.1

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 ACKERMANN, J.: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. Regelungstechn. u. Prozeß-Datenverarb. 20 (1972) S.297-300.
- 2 ACKERMANN, J.: Abtastregelung. Springer-Verlag 1972.
- 3 BODE, H.W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand 1945.
- 4 CHEN, C.-T.: Design of Compensators for a Class of Multivariable Linear Optimum Regulators. Preprints of 2nd IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Düsseldorf (1971) Paper 1.3.1 .
- 5 CROSSLEY, T.R.; PORTER, B.: Eigenvalue and Eigenvector Sensitivities in Linear Systems Theory. Int. J. Control, Vol.10 (1969) S. 163 - 170.
- 6 DORF, R.D.: Time Domain Analysis and Design of Control Systems. Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1965.
- 7 FORTMANN, TH.E.; WILLIAMSON, D.: Design of Low Order Observers for Linear Feedback Control Systems. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-17 (1972) S. 301 - 308.
- 8 HIPPE, P.: Zustandsregler in einläufigen Regelkreisen. Regelungstechn. u. Prozeß-Datenverarb. 22 (1974) S. 388 - 394.
- 9 HIPPE, P.: Über die Empfindlichkeit von Zustandsreglern. Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 75-32 (1975)
- 10 HIPPE, P.; WURMTHALER, CH.: Der Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich. Regelungstechnik 24 (1976) S. 47-52.
- 11 HUBER, B.: Das Empfindlichkeitsverhalten elektrischer Netzwerke unter dem Gesichtspunkt minimaler Gesamtempfindlichkeit. Dissertation, Erlangen 1973.

- 12 KALMAN, R.E.: When is a Linear Control System Optimal?
Trans. ASME, J. Basic Engrg., Ser.D, Vol.86 (1964) S. 51 - 60.
- 13 KOKOTOVIC, P.V.; RUTMAN, R.S.: Sensitivity of Automatic Control
Systems. Automatika i Telemekhanika, Vol.26, N°4 (1965) S.730-750.
- 14 LEE, CH.-K.; CHEN, CH.-T.: Sensitivity Comparison of Various
Analogue Computer Simulations. Int. J. Control, Vol.10 (1969)
S. 227 - 233.
- 15 LUENBERGER, D.G.: Observing the State of a Linear System.
IEEE Trans. Military Electronics, Vol. MIL-8 (1964) S.74 - 80.
- 16 LUENBERGER, D.G.: Observers for Multivariable Systems.
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-11 (1966) S.190 - 197.
- 17 LUENBERGER, D.G.: An Introduction to Observers.
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-16 (1971) S.596 - 602.
- 18 MANTEY, P.E.: Eigenvalue Sensitivity and State Variable Selection.
IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-13 (1968) S. 263 - 269.
- 19 NEWELL, R.B.; FISHER, D.G.: Experimental Evaluation of Optimal
Multivariable Regulatory Controllers with Modelfollowing
Capabilities. Automatica 8 (1972) S.247 - 262.
- 20 POWELL, M.J.D.: An Efficient Method for Finding the Minimum of a
Function of Several Variables without Calculating Derivatives.
Computer J., 7 (1964) S.155 - 162.
- 21 SCHNEIDER, F.: Geschlossene Formeln zur Berechnung der quadrati-
schen und der zeitbeschwerten quadratischen Regelfläche für
kontinuierliche und diskrete Systeme. Regelungstechnik 14 (1966)
S.159 - 166.
- 22 SCHWARZ, H.: Mehrfachregelungen II. Springer-Verlag 1971.
- 23 SINGER, R.A.: The Design and Synthesis of Linear Multivariable
Systems with Application to State Estimation. Stanford University
Report TR-6302-8, Center for Systems Research, June 1968.

- 24 SOLHEIM, O.A.: Ein optimaler Mehrgrößen - PI - Regler.
Regelungstechn. u. Prozeß-Datenverarb. 22 (1974) S.277 - 282.
- 25 TAESCHNER, M.: Strukturanalyse und algebraischer Entwurf linearer
Einfachregelkreise. Dissertation, Berlin 1968.
- 26 UNBEHAUEN, R.: Systemtheorie. R. Oldenbourg-Verlag 1971.
- 27 WEBER, W.: Ein systematisches Verfahren zum Entwurf linearer und
adaptiver Regelungssysteme. ETZA, Bd.88 (1967) S.138 - 144.
- 28 ZURMOHL, R.: Matrizen. Springer-Verlag 1964.

LEBENS LAUF

Persönliches: Geboren am 31.5.1941 in Berlin.

Verheiratet seit 7.12.1973.

Ausbildung: 1947 - 1949 Volksschule in Bippen Krs. Bersenbrück.
1949 - 1953 Volksschule in Merzen Krs. Bersenbrück.
1953 - 1955 Volksschule in Niefern (Baden).

1955 - 1958 Maschinenschlosserlehre bei Fa. Gebr. Bellmer
in Niefern.
Herbst 1958 Facharbeiterprüfung als Maschinenschlosser.
1958 - 1963 Tätigkeit als Technischer Zeichner
bei Fa. Gebr. Bellmer in Niefern.

1958 - 1963 Besuch des Abendgymnasiums Pforzheim.
Frühjahr 1963 Reifeprüfung für Schulfremde vor einer
Prüfungskommission des Oberschulamts Nordbaden.
Sommer 1963 Gießerei- und Modellschreinerei- Praktikum
bei den Firmen Hiller und Lutz in Ötisheim
sowie Gebr. Bellmer in Niefern.

Studium: 1.11.1963 - 30.9.1969 Studium des Maschinenbaus an der
Universität (TH) Stuttgart. Diplomarbeit am Institut A
für Mechanik der Universität Stuttgart. Bis Ende 1969
wissenschaftliche Hilfskraft am selben Institut.

Wissenschaftliche Tätigkeit:

Ab 1.1.1970 wissenschaftlicher Assistent am Institut
für Regelungstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg.
Ab 1.12.1973 akademischer Rat und seit 1.10.1975
akademischer Oberrat am selben Institut.

Copy - Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197